高三数学试题

一、单选题（本大题共 8 小题）

1．已知集合 $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2-x-2\le 0\right\}$，$B=\left\{x\mid 0\le x\le 5\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{0,1,2\}$　　C．$[0,2)$　　D．$[0,2]$

2．已知复数 z 和虚数单位 i 满足 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $\overline{z}=$（　）

A．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

C．$1-\mathrm{i}$　　D．$2-2\mathrm{i}$

3．已知向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(1,-1)$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则实数 $m=$（　）

A．3　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-3

4．为了得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只需把函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象（　）

A．向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B．向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

C．向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度　　D．向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度

5．$\left(1-\dfrac{2x}{y}\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为（　）

A．55　　B．-70　　C．65　　D．-25

6．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{1-x}+4$，若方程 $f(x)=kx+4-k(k>0)$ 有三个不同的根 x_1,x_2,x_3，则 $x_1+x_2+x_3=$（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．k

7．道韵楼以“古、大、奇、美”著称，内部雕梁画栋，有倒吊莲花、壁画、雕塑等，是历史、文化、民俗一体的观光胜地道韵楼可近似地看成一个正八棱柱，其底面面积约为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，高约为 11.5 米，则该八棱柱的侧面积约是（　）

A．460 平方米　　B．1840 平方米　　C．2760 平方米　　D．3680 平方米

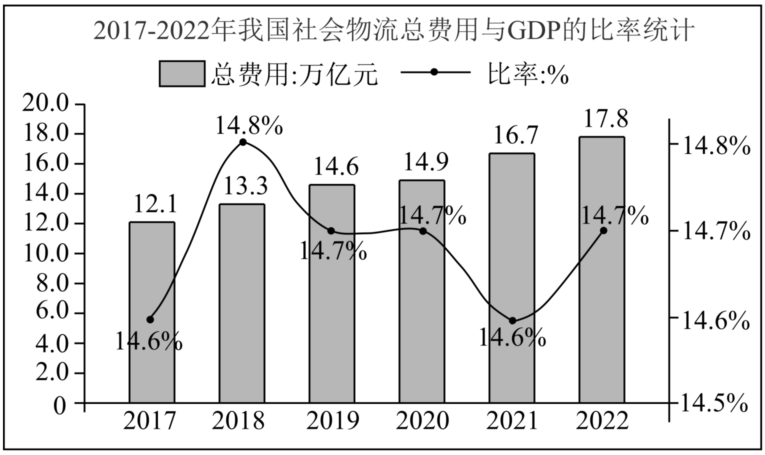
8．设 $a=3^{\pi}$，$b=\pi^{e}$，$c=e^{\pi}$（e 为自然对数底数），则 a，b，c 大小关系为（　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$

C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.

9．随着国民经济的快速发展和人民生活水平的不断提高，我国社会物流需求不断增加，物流行业前景广阔．社会物流总费用与 GDP 的比率是反映地区物流发展水平的指标，下面是 2017～2022 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率统计，则（　）.



A．2018～2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，且 2019 年增长的最多

B．2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用的 70% 分位数为 16.7 万亿元

C．2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为 0.2%

D．2019 年我国的 GDP 不达 100 万亿元

10．设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $a_n-a_{n-1}=-4$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_1=14$，则下列选项正确的是（　）

A．$a_n=-4n+14$

B．数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列

C．当$n=8$时S_n有最大值

D．设$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，则当$n=2$或$n=4$时数列$\{b_n\}$的前n项和取最大值

11．已知点$P\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$是函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的图象的一个对称中心，则（　）

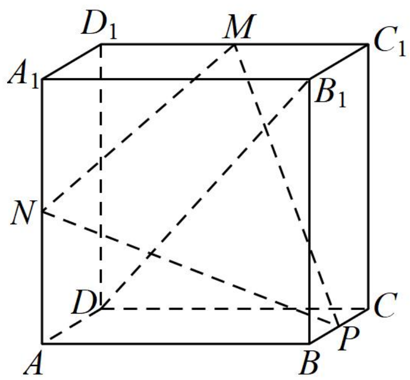
A．$f\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)-1$是奇函数

B．$\omega=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}k$，$k\in\mathbf{N}^*$

C．若$f(x)$在区间$\left(\frac{3\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$上有且仅有2条对称轴，则$\omega=2$

D．若$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$上单调递减，则$\omega=2$或$\omega=\frac{14}{3}$

12．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知M，N，P分别是棱C_1D_1，AA_1，BC的中点，Q为平面PMN上的动点，且直线QB_1与直线DB_1的夹角为$30°$，则（　）



A．$DB_1\perp$平面PMN

B．平面PMN截正方体所得的截面面积为$3\sqrt{3}$

C．点Q的轨迹长度为π

D．能放入由平面PMN分割该正方体所成的两个空间几何体内部（厚度忽略不计）的球的半径的最大值为$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

三、填空题

13．已知点P是曲线$y=\ln x$上的一点，则点P到直线$x-y=0$的最小距离为__________.

14．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(a-2)n^2+n+a$，$n\in\mathbf{N}^*$．若$\{a_n\}$是等差数列，则$\{a_n\}$的通项公式为____________.

15．某工厂生产一批零件（单位：cm），其尺寸X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且$P(X\le 20)=0.2$，$P(X<26)=0.8$，则$\mu=$__________.

16．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过$F$的直线$l$交椭圆于$A$，$B$两点，且$|AF|=3|FB|$，则直线$l$的斜率为________________.

四、解答题

17．已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$c\cos A-a\cos B+c=0$.

(1)求$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A$的值；

(2)若$a=5$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

18．近年来，国家鼓励德智体美劳全面发展，舞蹈课是学生们热爱的课程之一，某高中随机调研了本校2023年参加高考的90位考生是否喜欢跳舞的情况，经统计，跳舞与性别情况如下表：（单位：人）

	喜欢跳舞	不喜欢跳舞
女性	25	35
男性	5	25

(1)根据表中数据并依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，分析喜欢跳舞与性别是否有关联？

(2)用样本估计总体，用本次调研中样本的频率代替概率，从2023年本市考生中随机抽取3人，设被抽取的3人中喜欢跳舞的人数为X，求X的分布列及数学期望$E(X)$.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

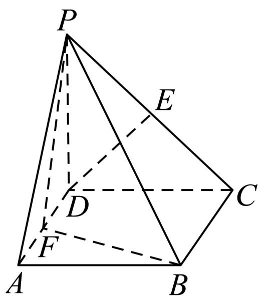
α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\dfrac{2a_n}{2na_n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PD\perp$底面$ABCD,E,F$分别是PC,AD中点.



(1)求证：$DE//$平面PFB；

(2)若PB与平面$ABCD$所成角为45°，求平面PFB与平面EDB夹角的余弦值.

21．已知$F_1\left(\sqrt{7},0\right),F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$，$M$为平面上一动点，且满足$|MF_2|-|MF_1|=4$，记动点$M$的轨迹为曲线$E$.

(1)求曲线E的方程；

(2)若$A(-2,0),B(2,0)$，过点$(1,0)$的动直线l交曲线E于P，Q（不同于A，B）两点，直线AP与直线BQ的斜率分别记为k_{AP}，k_{BQ}，求证：$\dfrac{k_{AP}}{k_{BQ}}$为定值，并求出定值.

22．已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(mx\right)-x\left(m>0\right)$.

(1)若$f(x)\le 0$恒成立，求m的取值范围；

(2)若$f(x)$有两个不同的零点x_1,x_2，且$x_2>2x_1$，求实数m的取值范围.

1．B

【分析】先求A集合，再利用交集概念求解即可.

【详解】因为$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|\left(x-2\right)\left(x+1\right)\le 0\right\}=\left\{-1,0,1,2\right\},B=\left\{x|0\le x\le 5\right\}$，所以$A\cap B=\left\{0,1,2\right\}$.

故选：B.

2．A

【分析】利用复数的除法运算求出z，再结合共轭复数的概念求$\bar{z}$.

【详解】$z=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}\left(1-\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\right)}=\frac{-\mathrm{i}^2+\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

故选：A

3．A

【分析】根据平面向量的坐标表示计算即可.

【详解】由$\vec{a}=\left(1,m\right),\vec{b}=\left(1,-1\right)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=\left(2,m-1\right)$.

因为$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，所以$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=1\times 2+\left(-1\right)\times\left(m-1\right)=0\Rightarrow m=3$.

故选:A.

4．B

【分析】先把目标函数变形为$y=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，再把平移函数变形为$y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})]$，即可确定平移方向和平移单位.

【详解】因为函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$可变形为$y=\sin[2(x+\frac{\pi}{12})]$，

函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$可变形为$y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})]$，

故把函数$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位即可得到$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，

故选： B.

5．D

【分析】根据$(x+y)^6$展开式的通项公式进行计算即可.

【详解】含x^4y^2的项为$T=1\times C_6^2x^4y^2-\frac{2x}{y}\times C_6^3x^3y^3=-25x^4y^2$,

所以展开式中x^4y^2的系数为-25.

故选：D.

6．B

【分析】由题意，易知 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数，$f\left(x\right)$ 由函数 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 向右平移一个单位长度，再向上平移 4 个单位长度而得到的，所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，再根据直线也关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，即可得答案.

【详解】由题意，因为 $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}=-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$，所以 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数，

$f\left(x\right)$ 由函数 $y=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ 向右平移一个单位长度，再向上平移 4 个单位长度而得到的，

所以 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(1,4\right)$ 对称.

而 $f\left(x\right)=kx+4-k=k\left(x-1\right)+4$ 所表示的直线也关于点 $\left(1,4\right)$ 对称，

所以方程 $f\left(x\right)=kx+4-k$ 的三个实根 x_1,x_2,x_3 中必有一个为 1，另外两个关于 $x=1$ 对称，所以 $x_1+x_2+x_3=3$.

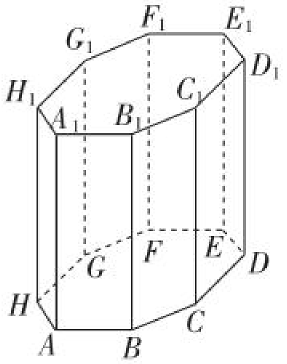
故选：B.

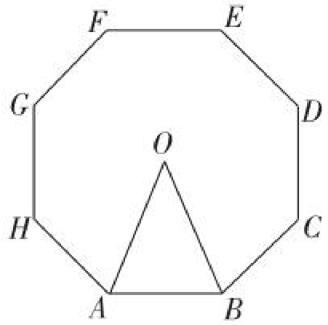
7．D

【分析】利用 $ABCDEFGH$ 是正八边形，求得 $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$，利用余弦定理求得 $OA^2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2$，利用底面面积求得 $AB=40$，从而求得侧面积.

【详解】如图，由题意可知底面 $ABCDEFGH$ 是正八边形，$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$，由余弦定理可得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB=(2-\sqrt{2})OA^2$，则 $OA^2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2$.因为底面 $ABCDEFGH$ 的面积为 $3200(\sqrt{2}+1)$ 平方米，所以 $8\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}AB^2=3200(\sqrt{2}+1)$，解得 $AB=40$.则该八棱柱的侧面积为 $320\times11.5=3680$ 平方米.

故选：D.





8．B

【分析】由 $\ln a=\pi\ln 3$，$\ln b=\mathrm{e}\ln\pi$，$\ln c=\pi$，且 $\ln a>\ln c$，构造 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$ 利用导数研究单调性比较 $\dfrac{\ln\pi}{\pi},\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$ 大小，即可得结果.

【详解】由题设 $\ln a=\pi\ln 3$，$\ln b=\mathrm{e}\ln\pi$，$\ln c=\pi$，显然 $\ln a>\ln c$，

对于 $\mathrm{e}\ln\pi$，π 的大小，只需比较 $\dfrac{\ln\pi}{\pi},\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$ 大小，

令 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\ln x}{x}}$ 且 $x\ge \mathrm{e}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\le 0$，即 $f(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上递减，

所以 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，故 $\ln b=\mathrm{e}\ln\pi<\ln c=\pi$，

综上，$\ln a>\ln c>\ln b$，故 $a>c>b$.

故选：B

9．BCD

【分析】由图表结合统计相关知识逐项判断可得答案.

【详解】由图表可知，2018～2022 这 5 年我国社会物流总费用逐年增长，2021 年增长的最多，且增长为 $16.7-14.9=1.8$ 万亿元，故 A 错误；

因为 $6\times 70\%=4.2$，则 70% 分位数为第 5 个，即为 16.7，

所以这 6 年我国社会物流总费用的 70% 分位数为 16.7 万亿元，故 B 正确；

由图表可知，2017～2022 这 6 年我国社会物流总费用与 GDP 的比率的极差为 $14.8\%-14.6\%=0.2\%$，故 C 正确；

由图表可知，2019 年我国的 GDP 为 $14.6\div 14.7\%<100$ 万亿元，故 D 正确.

故选：BCD.

10．BD

【分析】根据等差数列的定义求出通项公式判断 A，求出 $\dfrac{S_n}{n}=-2n+16$，然后利用等差数列

定义判断 B，结合二次函数求等差数列前 n 项和的最大值判断 C，根据 b_n 的符号判定 $\{b_n\}$ 前 n 项和的最值判断 D.

【详解】对于 A，由 $a_n-a_{n-1}=-4$ 知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 -4，首项为 $a_1=14$，

所以该数列的通项公式为 $a_n=14-4(n-1)=-4n+18$，错误；

对于 B，因为 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(14+18-4n)}{2}=-2n^2+16n$，所以 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{-2n^2+16n}{n}=-2n+16$，

则当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{S_n}{n}-\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=-2n+16-(-2n+18)=-2$，故数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，正确；

对于 C，$S_n=-2n^2+16n=-2(n-4)^2+32$，故当 $n=4$ 时，S_n 有最大值，错误；

对于 D，令 $a_n>0$ 得 $1\leq n\leq 4$，令 $a_n<0$ 得 $n\geq 5$，

则当 $n=1$ 或 2 时，$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}>0$，

当 $n=3$ 时，$b_3<0$，当 $n=4$ 时，$b_4>0$，当 $n\geq 5$ 时，$b_n<0$，

又 $b_3=a_3a_4a_5=6\times 2\times(-2)=-24$，$b_4=a_4a_5a_6=2\times(-2)\times(-6)=24$，

所以 $n=2$ 或 $n=4$ 时，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取最大值，正确.

故选：BD

11．BC

【分析】根据 $f(x)$ 的对称中心求得 b,ω，根据奇偶性、对称性、单调性等知识确定正确答案.

【详解】依题意，点 $P\left(\dfrac{3\pi}{8},1\right)$ 是函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的图象的一个对称中心，

所以 $b=1$，且 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\omega+\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\dfrac{3\pi}{8}\omega+\dfrac{\pi}{4}=k\pi,\omega=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k,k\in\mathbf{N}^*$ ①，B 选项正确.

则 $f(x)=\sin\left[\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k\right)x+\dfrac{\pi}{4}\right]+1,k\in\mathbf{N}^*$，

所以 $f\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)-1=\sin\left[\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k\right)\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left[\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{3}k\right)x+\dfrac{\pi}{2}(1-2k)\right]$，