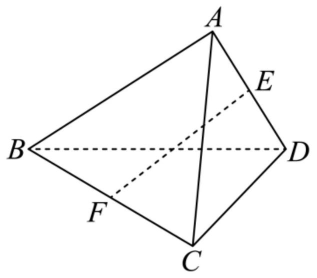
2024-2025 学年高二上学期 10 月月考数学试卷

一、单选题（本大题共 8 小题）

1．已知 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,4,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(5,-6,\lambda)$，若 A,B,C,D 四点共面，则实数 $\lambda=$（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

2．如图，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2，点 E，F 分别为棱 AD，BC 的中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的值为（　　）



A．4　　B．-4　　C．-2　　D．2

3．已知 $\vec{n}$ 为平面 α 的一个法向量，l 为一条直线，$\vec{m}$ 为直线 l 的方向向量，则“$\vec{m}\perp\vec{n}$”是“$l\,/\!/\,\alpha$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

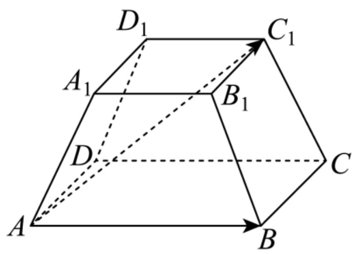
4．若 $A(2,2,1)$，$B(0,0,1)$，$C(2,0,0)$，则点 A 到直线 BC 的距离为（　　）

A．$\frac{2\sqrt{30}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

5．空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，经过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\vec{m}=(A,B,C)$ 的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，经过点 (x_0,y_0,z_0) 且一个方向向量为 $\vec{n}=(a,b,c)(abc\neq0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，阅读上面的材料并解决下列问题：现给出平面 α 的方程为 $2x-3y-z=0$，经过点 $(0,0,0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$，则直线 l 与平面 α 所成角的正弦值为（　　）

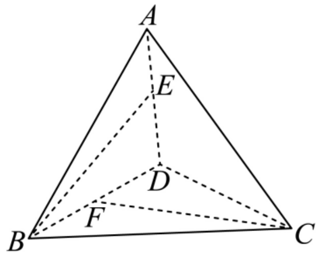
A．$\frac{5}{14}$　　B．$\frac{3}{14}$　　C．$\frac{5}{13}$　　D．$\frac{3}{13}$

6．如图，正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,A_1B_1=1$，则 $\overrightarrow{AC_1}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量是（　　）



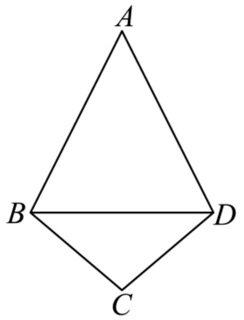
A． $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$　　　B． $\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$　　　C． $\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$　　　D． $\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$

7．如图，四面体 $A\text{-}BCD$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 均为等边三角形，点 E、F 分别在边 AD、BD，且满足 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FD}$，$\sin\angle EBD=\frac{3}{5}$，记二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 θ，$\cos\theta=\frac{1}{3}$，则异面直线 BE 与 CF 所成角的正弦值是（　　）



A． $\frac{\sqrt{35}}{6}$　　　B． $\frac{1}{6}$　　　C． $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　　　D． $\frac{1}{5}$

8．如图，四边形 $ABCD$，$AB=BD=DA=4$，$BC=CD=2\sqrt{2}$，现将 ΔABD 沿 BD 折起，当二面角 $A-BD-C$ 的大小在 $[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 时，直线 AB 和 CD 所成角为 α，则 $\cos\alpha$ 的最大值为（　　）



A． $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$　　　B． $\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}$　　　C． $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$　　　D． $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

二、多选题（本大题共 3 小题）

9．已知四面体 $OABC$，则下列说法正确的是（　　）

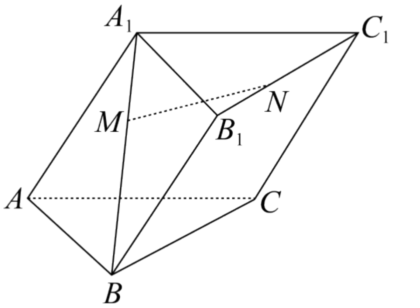
A．若 D 为 BC 的中点，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

B．若四面体 $OABC$ 是棱长为 1 的正四面体，则 $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=1$

C．若 $A(1,1,0)$，$B(0,3,0)$，$C(2,2,3)$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量是 $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

D．已知 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}=-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$，$\vec{c}=-3\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}$，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不可能共面

10．如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，M，N 分别是 A_1B，B_1C_1 上的点，且 $BM=2A_1M$，$C_1N=2B_1N$. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，若 $\angle BAC=90^\circ$，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，$AB=AC=AA_1=1$，则下列说法中正确的是（　　）



A．$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　B．$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}$

C．直线 AB_1 和直线 BC_1 相互垂直　　D．直线 AB_1 和直线 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{6}$

11．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 上一点，且 $B_1P=2PB$，Q 为正方形 BB_1C_1C 内一动点（含边界），则下列说法中正确的是（　　）

A．若 D_1Q // 平面 A_1PD，则动点 Q 的轨迹是一条长为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 的线段

B．存在点 Q，使得 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD

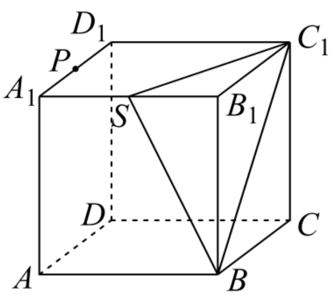
C．三棱锥 $Q-A_1PD$ 的最大体积为 $\frac{5}{18}$

D．若 $D_1Q=\frac{\sqrt{6}}{2}$，且 D_1Q 与平面 A_1PD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$

三、填空题（本大题共 3 小题）

12．已知 $\vec{a}=(3,-2,-3)$，$\vec{b}=(-2,x-2,2)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是______________.

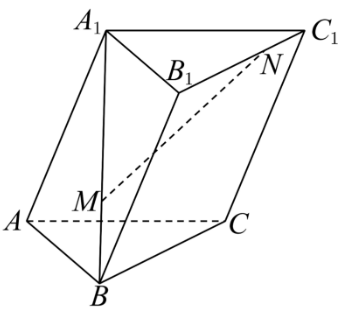
13．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 2，S 是 A_1B_1 的中点，P 是 A_1D_1 的中点，点 Q 在正方形 DCC_1D_1 及其内部运动，若 $PQ//$ 平面 SBC_1，则点 Q 的轨迹的长度是_____________.



14．在平面四边形 $PBCD$ 中，$PB=PD=\sqrt{3}$，$BC=1$，$CD=2\sqrt{2}$，$BD=3$，沿 BD 将 ΔPBD 向上翻折，得到四面体 $ABCD$，则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为___________；若二面角 $A-BD-C$ 的大小为 120°，则 $AC^2=$______________.

四、解答题（本大题共5小题）

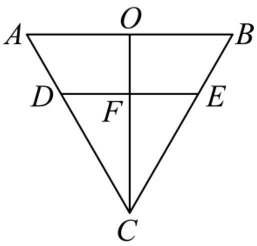
15．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M,N 分别是 A_1B,B_1C_1 上的点，且 $\overrightarrow{A_1M}=2\overrightarrow{MB},\overrightarrow{B_1N}=2\overrightarrow{NC_1}$．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$．



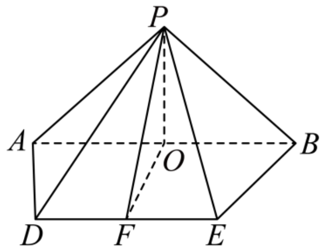
(1)试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$；

(2)若 $\angle BAC=90^\circ,\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ,AB=AC=AA_1=1$，求异面直线 MN 与 AC 的夹角的余弦值．

16．如图一，$\triangle ABC$ 是等边三角形，CO 为 AB 边上的高线，D，E 分别是 CA，CB 边上的点，$AD=BE=\frac{1}{3}AC=2$；如图二，将 $\triangle CDE$ 沿 DE 翻折，使点 C 到点 P 的位置，$PO=3$．



图一

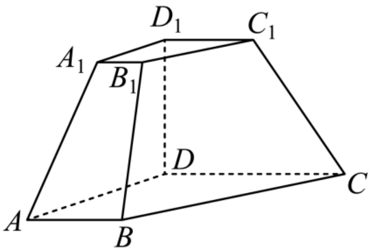


图二

(1)求证：$OP\perp$ 平面 $ABED$；

(2)求平面 BPE 与平面 PEF 夹角的正弦值．

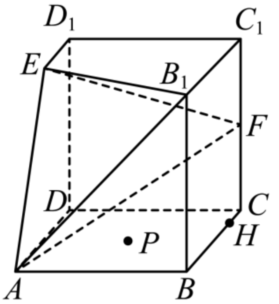
17．如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//CD$，$DA=DC=2$，$AB=C_1D_1=1$，$\angle ADC=120^\circ$，$\angle D_1DA=\angle B_1BA=90^\circ$．



(1)证明：平面 $D_1C_1CD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)若四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{7\sqrt{3}}{4}$，求直线 AA_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值．

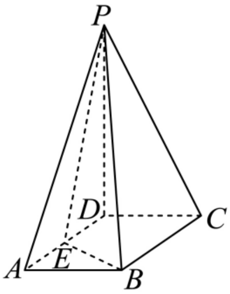
18．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 A_1D_1 的中点，过 AB_1E 的平面截此正方体，得如图所示的多面体，F 为直线 CC_1 上的动点．



(1)点 H 在棱 BC 上，当 $CH=\frac{1}{4}CB$ 时，$FH//$ 平面 AEB_1，试确定动点 F 在直线 CC_1 上的位置，并说明理由；

(2)若 $AB=2,P$ 为底面 $ABCD$ 的中心，求点 P 到平面 AEF 的最大距离.

19．已知两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角，记作 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的“向量积”为：$\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个向量，它与向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直，它的模 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$DP=DA=4$，E 为 AD 上一点，$|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BP}|=8\sqrt{5}$.



(1)求 AB 的长；

(2)若 E 为 AD 的中点，求二面角 $P-EB-A$ 的余弦值；

(3)若 M 为 PB 上一点，且满足 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{EM}$，求 λ.

参考答案

1. 【答案】D

【详解】若 A,B,C,D 四点共面，则存在实数 x,y 使得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ 成立，

则 $\begin{cases}5=2x-y\\-6=-x+4y\\\lambda=3x-2y\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\y=-1\\\lambda=8\end{cases}$

故选：D.

2. 【答案】C

【详解】$\because \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{2}\times2^2\cos60^\circ-2^2+\frac{1}{2}\times2^2\times\cos60^\circ=-2$.

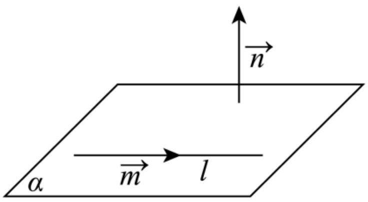
故选：C.

3. 【答案】B

【分析】利用线面垂直的性质及其法向量与方向向量的关系，即可判断得出结论

.

【详解】根据题意可知，如下图所示：



若 $\vec{m}\perp\vec{n}$，则 l 可以在平面 α 内，即 $l\subset\alpha$，所以充分性不成立；

若 $l\,/\!/\,\alpha$，易知 $\vec{n}\perp\alpha$，由线面垂直性质可知 $\vec{m}\perp\vec{n}$，即必要性成立；

所以可得“$\vec{m}\perp\vec{n}$”是“$l\,/\!/\,\alpha$”的必要不充分条件.

故选 B.

4. 【答案】A

【详解】$\overrightarrow{BA}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,-1)$，则 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量的模为

$\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

则点 A 到直线 BC 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}\right)^2}=\sqrt{(\sqrt{8})^2-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

故选：A.

5. 【答案】A

【详解】由题设知：平面 α 的法向量 $\vec{m}=(2,-3,-1)$，直线 l 的方向向量 $\vec{n}=(-1,2,-3)$，

且平面 α 与直线 l 相交于 $(0,0,0)$，

所以直线 l 与平面 α 所成角的正弦值为 $|\cos\left\langle \overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\right\rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|} = \dfrac{5}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}} = \dfrac{5}{14}$.

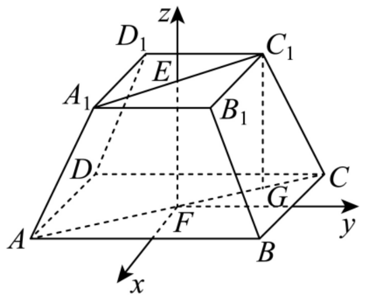
故选：A

6. 【答案】A

【详解】设正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h，

所以四边形 $ABCD$，$A_1B_1C_1D_1$ 是正方形，设其中心分别为 F,E，连接 CA,C_1A_1，

如图，以 F 为原点建立空间直角坐标系，且作 $C_1G\perp CF$，



由勾股定理得 $CA=2\sqrt{2},C_1A_1=\sqrt{2}$，所以 $CF=\sqrt{2},C_1E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由题意得 $C_1E//CF$，$C_1G//EF$，所以四边形 $EFGC_1$ 是平行四边形，

所以 $C_1E=GF=\dfrac{\sqrt{2}}{2},EF=C_1G$，故 $CG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $C_1(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},h)$，

而 $A(1,-1,0),B(1,1,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},h)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}=2\times\dfrac{3}{2}=3$

，

由投影向量公式得 $\overrightarrow{AC_1}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，故 A 正确.

故选：A

7. 【答案】C

【详解】由于$\triangle ABD$与$\triangle BCD$均为等边三角形，由 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FD}$ 可知 F 为 BD 的中点，

过 E 作 $EH\perp BD$，交 BD 于 H 点，连接 EH，则 $EH\perp BD$，$CF\perp BD$，

故 $\overrightarrow{HE},\overrightarrow{FC}$ 的夹角即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 θ，故 $\cos\overrightarrow{HE},\overrightarrow{FC}=\dfrac{1}{3}$，

设等边三角形的边长为 2，

设 BE 与 CF 的夹角为 α，则 $\alpha\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

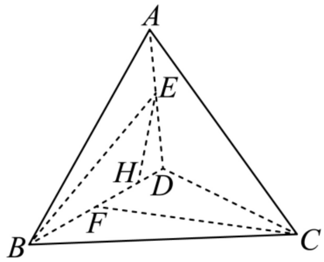
$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CF}\cdot(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HE})=\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{HE}$，

即 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=\left|\overrightarrow{CF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{HE}\right|\cos(\pi-\theta)=\sqrt{3}\times\left|BE\right|\sin\angle EBD\times\left(-\cos\theta\right)=\left|\overrightarrow{CF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|\cos\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}$，

则 $\sqrt{3}\times\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}$，$-\dfrac{1}{5}=\cos\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}$

$\therefore \cos\alpha=\left|\cos\cos\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}\right|=\dfrac{1}{5}$，即 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

故选：C．



8．【答案】C

【详解】解：取 BD 中点 O，连结 AO，CO，

∵ $AB=BD=DA=4$．$BC=CD=2\sqrt{2}$，∴ $CO\perp BD$，$AO\perp BD$，且 $CO=2$，$AO=2\sqrt{3}$，

∴ $\angle AOC$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，

以 O 为原点，OC 为 x 轴，OD 为 y 轴，

过点 O 作平面 BCD 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

B（0，－2，0），C（2，0，0），D（0，2，0），

设二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 θ，则 $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

连 AO、BO，则 $\angle AOC=\theta$，A（$2\sqrt{3}cos\theta,0,2\sqrt{3}sin\theta$），

∴ $\overrightarrow{BA}=\left(2\sqrt{3}cos\theta,2,2\sqrt{3}sin\theta\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-2,2,0\right)$，

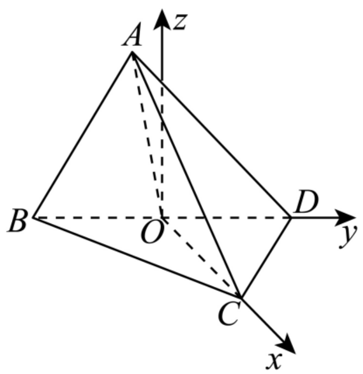
设 AB、CD 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{\left|1-\sqrt{3}cos\theta\right|}{2\sqrt{2}}$，

∵ $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，∴ $\cos\theta\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，∴ $|1-\sqrt{3}cos\theta|\in[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$．

∴ $\cos\alpha$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$．

故选 C．



9．【答案】ABC

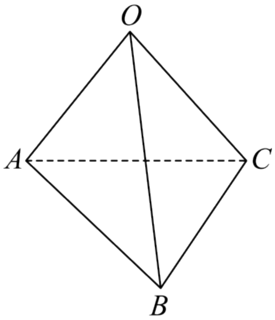
【详解】对于 A，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$，故 A 正确；

对于 B，因为正四面体 $OABC$，所以对棱互相垂直，

$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CB}$

$=1\times1\times\cos60^\circ+1\times1\times\cos90^\circ+1\times1\times\cos90^\circ+1\times1\times\cos60^\circ=1$，故 B 正确；



对于 C，$\overrightarrow{AB}=\left(-1,2,0\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(1,1,3\right)$，所以向量$\overrightarrow{AC}$在向量$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为

$\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-1+2}{1+4}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$，故 C 正确；

对于 D，假设向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，则$\vec{a}=x\vec{b}+y\vec{c}$，$x,y\in\mathrm{R}$，

所以$\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\left(-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)+y\left(-3\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}\right)$

$=\left(-x-3y\right)\overrightarrow{OA}+\left(3x+7y\right)\overrightarrow{OB}+2x\overrightarrow{OC}$，

所以$\begin{cases}1=-x-3y\\-2=3x+7y\\1=2x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

所以当$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$时向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，故 D 错误.

故选：ABC.

10. 【答案】ABD

【详解】A：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1N}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，$\therefore\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$.

B：$\because AB=AC=AA_1=1$，$\therefore|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

$\because\angle BAC=90^\circ$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$\because\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore|\overrightarrow{MN}|^2=\dfrac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\dfrac{1}{9}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=\dfrac{5}{9}$，$\therefore|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

对于 C、D：$\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{c},\overrightarrow{BC_1}=\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}$，

$\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\dfrac{(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{b}-\vec{a})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{c})^2}\sqrt{(\vec{c}+\vec{b}-\vec{a})^2}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{1+1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{6},$$

所以 D 正确，C 错误，

故选：ABD.

11. 【答案】ACD

【详解】对于 A 中，如图所示，分别在 B_1C_1, CC_1 取点 E, F，使得

$C_1E=2B_1E, C_1F=2CF$，

可得 $EF//B_1C$，因为 $A_1D//B_1C$，所以 $EF//A_1D$，

因为 $A_1D\subset$ 平面 A_1PD，$EF\not\subset$ 平面 A_1PD，所以 $EF//$ 平面 A_1PD，

又由 $D_1F//A_1P$，且 $A_1P\subset$ 平面 A_1PD，$D_1F\not\subset$ 平面 A_1PD，所以 $D_1F//$ 平面 A_1PD，

又因为 $EF\cap D_1F=F$，且 $EF, D_1F\subset$ 平面 DEF，所以平面 $DEF//$ 平面 A_1PD，

且平面 $DEF\cap$ 平面 $BCC_1B_1=EF$，

若 $D_1Q//$ 平面 A_1PD，则动点 Q 的轨迹为线段 EF，且 $EF=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 A 正确；

对于 B 中，以 D_1 为原点，以 D_1A_1, D_1C_1, D_1D 所在的直线分别为 x, y, z 轴，

建立空间直角坐标系，如图所示，

可得 $A_1(1,0,0), D(0,0,1), P(1,1,\frac{2}{3})$，则 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1), \overrightarrow{A_1P}=(0,1,\frac{2}{3})$，

设 $Q(x,1,z)(0\le x\le 1, 0\le z\le 1)$，可得 $\overrightarrow{D_1Q}=(x,1,z)$，

设 $\vec{m}=(a,b,c)$ 是平面 A_1PD 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=-a+c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=b+\frac{2}{3}c=0\end{cases}$，

取 $c=3$，可得 $z=3, b=-2$，所以 $\vec{m}=(3,-2,3)$，

若 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD，则 $\overrightarrow{D_1Q}//\vec{m}$，所以存在 $\lambda\in\mathrm{R}$，使得 $\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\vec{m}$，

则 $x=z=-\frac{3}{2}\notin[0,1]$，所以不存在点 Q，使得 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD，所以 B 错误；

对于 C 中，由 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1), \overrightarrow{A_1P}=(0,1,\frac{2}{3})$，可得 $\left|\overrightarrow{A_1D}\right|=\sqrt{2}, \left|\overrightarrow{A_1P}\right|=\frac{\sqrt{13}}{3}, \overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{3}$，

则 $\cos\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{A_1P}=\frac{2}{\sqrt{26}}$，所以 $\sin\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{A_1P}=\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{26}}$，

所以 $S_{\triangle A_1PD}=\frac{1}{2}A_1D\cdot A_1P\sin\angle DA_1P=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{22}}{6}$，

要使得三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大，只需点 Q 到平面 A_1PD 的距离最大，

由 $\overrightarrow{A_1Q}=(x-1,1,z)$，可得点 Q 到平面 A_1PD 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{A_1Q}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}=\frac{1}{\sqrt{22}}\left|3(x+z)-5\right|$，