专题07 数列专题（数学文化）

一、单选题

1.（2022·全国·高三专题练习）《周髀算经》有这样一个问题：从冬至日起，依次为小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种十二个节气日影长减等寸，冬至、立春、春分日影之和为三丈一尺五寸，前九个节气日影之和为八丈五尺五寸，问芒种日影长为（一丈 = 十尺 = 一百寸）（　）.

A．一尺五寸　　B．二尺五寸　　C．三尺五寸　　D．四尺五寸

【答案】B

【分析】十二个节气日影长构成一个等差数列$\{a_n\}$，利用等差数列通项公式、前n项和公式列出方程组，求出首项和公差，由此能求出芒种日影长.

【详解】由题意知:

$\therefore$从冬至日起，依次小寒、大寒等十二个节气日影长构成一个等差数列$\{a_n\}$，设公差为d，

$\because$冬至、立春、春分日影之和为三丈一尺五寸，前九个节气日影之和为八丈五尺五寸，

$\therefore\begin{cases}a_1+a_4+a_7=3a_1+9d=315\\ S_9=9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}d=855\end{cases}$，解得$a_1=135$，$d=-10$，

$\therefore$芒种日影长为$a_{12}=a_1+11d=135-11\times 10=25$（寸）$=2$尺5寸.

故选：B

2.（2022秋·陕西咸阳·高二武功县普集高级中学校考阶段练习）河南洛阳龙门石窟是中国石刻艺术宝库，现为世界非物质文化遗产之一.某洞窟的浮雕共7层，它们构成一幅优美的图案.若从下往上计算，从第二层开始，每层浮雕像的个数依次是下层个数的2倍，且第三层与第二层浮雕像个数的差是16，则该洞窟的浮雕像的总个数为（　）

A．1016　　B．512　　C．128　　D．1024

【答案】A

【分析】设从上到下第$n\left(n\in N_*,1\le n\le 7\right)$层的浮雕像个数为$a_n$，分析可知数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，且公比为$2$，根据已知条件求出$a_1$的值，利用等比数列求和公式可求得结果.

【详解】设从上到下第$n\left(n\in N_*,1\le n\le 7\right)$层的浮雕像个数为$a_n$，

由题意可知，数列$\left\{a_n\right\}$为等比数列，且该数列的公比为2，

由已知可得$a_3-a_2=2a_2-a_2=16$，可得$a_2=16$，故$a_1=\frac{a_2}{2}=8$，

因此，该洞窟的浮雕像的总个数为$\frac{8\left(1-2^7\right)}{1-2}=8\times127=1016$.

故选：A.

3. (2022秋·广东广州·高二华南师大附中校考阶段练习)《莱因德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一. 书中有一道这样的题目：把 100 个面包分给 5 个人，使每人所得成等差数列，且使较大的三份之和的$\frac{1}{3}$是较小的两份之和，则最小的一份为（　）

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 30

【答案】B

【分析】设五个人所分得的面包为$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，(其中$d>0$)，则由总和为 100 可求得$a=20$，再由较大的三份之和的$\frac{1}{3}$是较小的两份之和，可得$12d=3a$，从而可求出d，进而可求出$a-2d$

【详解】设五个人所分得的面包为$a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$，(其中$d>0$)，

则有$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5a=100$，

$\therefore a=20$，

由$a+a+d+a+2d=3(a-2d+a-d)$，得$3a+3d=3(2a-3d)$；

$\therefore 12d=3a$，

$\therefore d=5$.

$\therefore$最少的一份为$a-2d=20-10=10$.

故选：B

4. （2022·河北邯郸·统考模拟预测）位于丛台公园内的武灵丛台已经成为邯郸这座三千年古城的地标建筑，丛台上层建有据胜亭，其顶部结构的一个侧面中，自上而下第一层有 2 块筒瓦，以下每一层均比上一层多 2 块筒瓦，如果侧面共有11层筒瓦且顶部4个侧面结构完全相同，顶部结构共有多少块筒瓦？（　）

A. 440　　B. 484　　C. 528　　D. 572

【答案】C

【分析】由题意知每层筒瓦数构成等差数列$\{a_n\}$，由等差数列求和公式可求得每一面的筒瓦总数，由此可得四个侧面筒瓦总数.

【详解】$\because$一个侧面中，第一层筒瓦数记为2，自上而下，由于下面每一层比上一层多2块筒瓦，

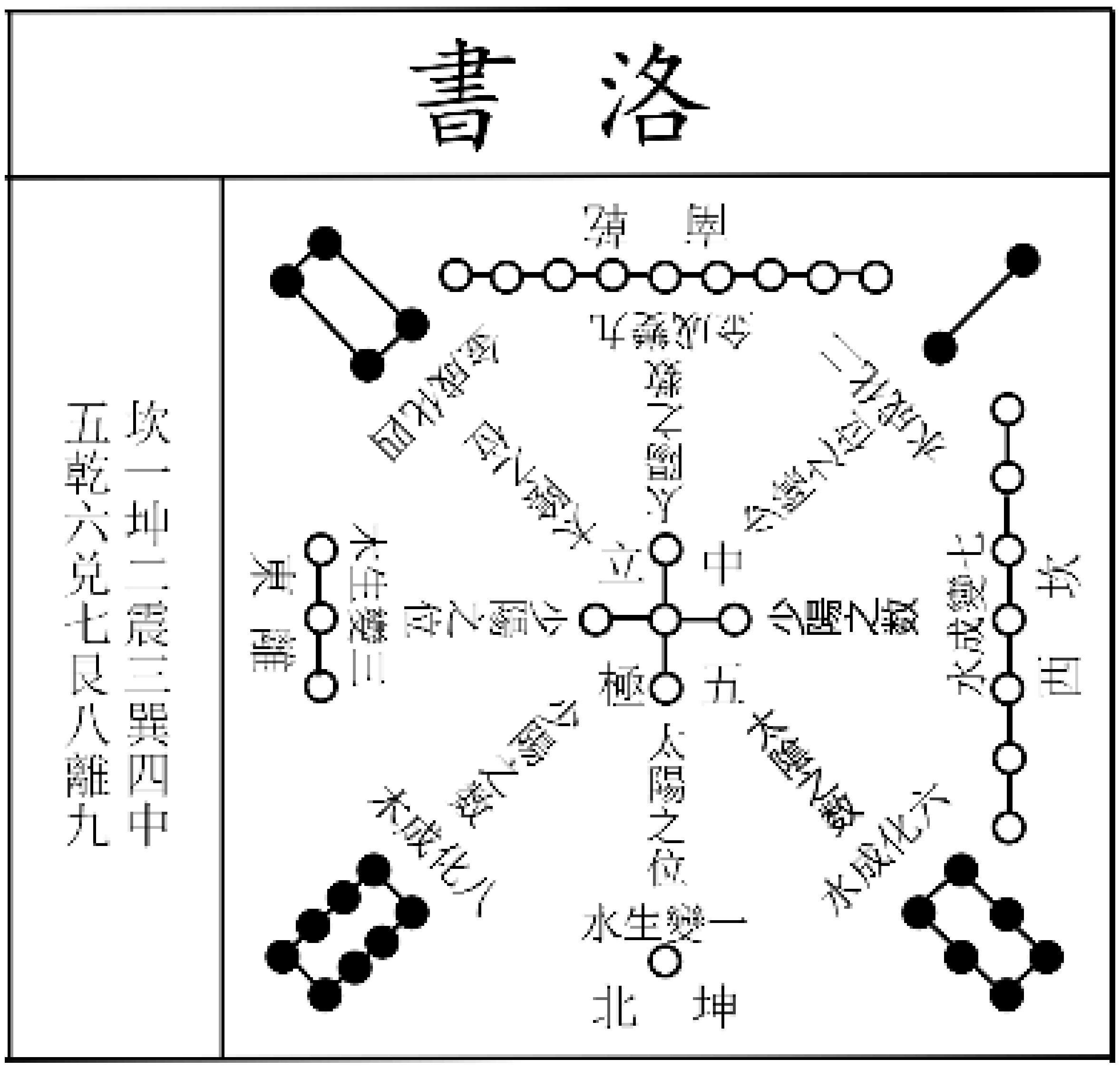
$\therefore$每层筒瓦数构成等差数列$\{a_n\}$，其中$a_1=2$，$d=2$.

$\because$一个侧面中共有11层筒瓦，$\therefore$一个侧面筒瓦总数是$11\times 2+\dfrac{11\times(11-1)}{2}\times 2=132$，

$\therefore$顶层四个侧面筒瓦数总和为$132\times 4=528$.

故选：C.

5.（2023·全国·高三专题练习）如图 1，洛书是一种关于天地空间变化脉络的图案，2014 年正式入选国家级非物质文化遗产名录，其数字结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，形成图 2 中的九宫格，将自然数 1，2，3，…，n^2放置在 n 行 n 列$(n\geq 3)$的正方形图表中，使其每行、每列、每条对角线上的数字之和（简称“幻和”）均相等，具有这种性质的图表称为“n 阶幻方”．洛书就是一个 3 阶幻方，其“幻和”为 15．则 7 阶幻方的“幻和”为（　）



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1 图 2

A．91　　B．169　　C．175　　D．180

【答案】C

【分析】根据“幻和”的定义，将自然数 1 至 n^2 累加除以 n 即可得结果.

【详解】由题意，7 阶幻方各行列和，即“幻和”为 $\frac{1+2+...+49}{7}=175$.

故选：C

6．（2022·全国·高三专题练习）斐波那契数列，又称黄金分割数列，该数列在现代物理、准晶体结构、化学等领域有着非常广泛的应用，在数学上，斐波那契数列是用如下递推方法定义的：$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\left(n\geq 3,n\in N^*\right)$．已知 $\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_m^2}{a_m}$ 是该数列的第 100 项，则 m=（　）

A．98　　　　B．99

C．100　　　　D．101

【答案】B

【分析】根据题意推出 $a_1^2=a_2a_1$，$a_2^2=a_2a_3-a_2a_1$，$\cdots$，$a_m^2=a_ma_{m+1}-a_ma_{m-1}$，利用累加法可得 $\sum_{i=1}^{m}a_i^2=a_ma_{m+1}$，即可求出 m 的值.

【详解】由题意得，$a_1^2=a_2a_1$，因为 $a_{n-1}=a_n-a_{n-2}$，

得 $a_2^2=a_2(a_3-a_1)=a_2a_3-a_2a_1$，

$a_3^2=a_3(a_4-a_2)=a_3a_4-a_3a_2$，

$\cdots$，

$a_m^2=a_m(a_{m+1}-a_{m-1})=a_ma_{m+1}-a_ma_{m-1}$，

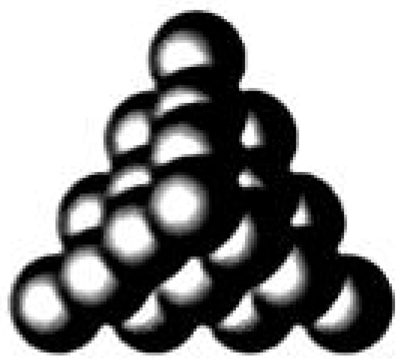
累加，得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2=a_ma_{m+1}$，

因为 $\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2}{a_m}$ 是该数列的第 100 项，

即 a_{m+1} 是该数列的第 100 项，所以 $m=99$.

故选：B.

7．（2022 春·河南南阳·高二校联考阶段练习）南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有如下俯视图所示的几何体，后人称之为“三角垛”．其最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球，…，则第 50 层球的个数为（　）



A．1255　　B．1265

C．1275　　D．1285

【答案】C

【分析】根据题中给出的图形，结合题意找到各层球的个数与层数的关系，得到$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，进而求解结论．

【详解】解：设各层球的个数构成数列$\{a_n\}$，

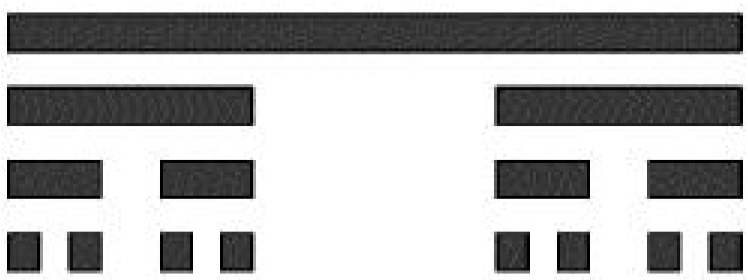
由题意可知，$a_1=1$，$a_2=a_1+2=1+2$，$a_3=a_2+3=1+2+3$，$\cdots$，$a_n=a_{n-1}+n=1+2+3+\ldots+n$，

故$a_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore a_{50}=\frac{50\times 51}{2}=1275$，

故选：C．

8．（2022秋·江苏南通·高三江苏省如皋中学统考阶段练习）1883年，德国数学家康托提出了三分康托集，亦称康托尔集.下图是其构造过程的图示，其详细构造过程可用文字描述为：第一步，把闭区间$[0,1]$平均分成三段，去掉中间的一段，剩下两个闭区间$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$；第二步，将剩下的两个闭区间分别平均分为三段，各自去掉中间的一段，剩下四段闭区间：$[0,\frac{1}{9}]$，$[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$，$[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$，$[\frac{8}{9},1]$；如此不断的构造下去，最后剩下的各个区间段就构成了三分康托集.若经历n步构造后，$\frac{2021}{2022}$不属于剩下的闭区间，则n的最小值是（　）.



A．7　　B．8　　C．9　　D．10

【答案】A

【分析】根据三分康托集的构造过程可知：经历第n步，每个去掉的开区间以及留下的闭区间的区间长度都

是$\left(\frac{1}{3}\right)^n$，根据规律即可求出$\frac{2021}{2022}$属于$\left(1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n,1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$，进而根据不等式可求解.

【详解】$\frac{2021}{2022}$不属于剩下的闭区间，$\frac{2021}{2022}$属于去掉的开区间

经历第1步，剩下的最后一个区间为$[\frac{2}{3},1]$，经历第2步，剩下的最后一个区间为$\left[\frac{8}{9},1\right]$，……，

经历第n步，剩下的最后一个区间为$\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n,1\right]$，去掉的最后开区间为$\left(1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n,1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

由$1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{2011}{2022}<1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$化简得$\begin{cases}4044>3_n\\2022<3_n\end{cases}$，解得$n=7$

故选:A

9.（2022春·江苏南通·高二统考期末）“埃拉托塞尼筛法”是保证能够挑选全部素数的一种古老的方法．这种方法是依次写出2和2以上的自然数，留下头一个2不动，剔除掉所有2的倍数；接着，在剩余的数中2后面的一个数3不动，剔除掉所有3的倍数；接下来，再在剩余的数中对3后面的一个数5作同样处理；……，依次进行同样的剔除．剔除到最后，剩下的便全是素数．在利用“埃拉托塞尼筛法”挑选2到30的全部素数过程中剔除的所有数的和为（　）

A．333　　B．335　　C．337　　D．341

【答案】B

【分析】根据给定条件，求出2到30的全部整数和，再求出2到30的全部素数和即可计算作答.

【详解】2到30的全部整数和$S_1=\frac{2+30}{2}\times29=464$，2到30的全部素数和

$S_2=2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129$，

所以剔除的所有数的和为$464-129=335$.

故选：B

10.（2022·全国·高三专题练习）谈祥柏先生是我国著名的数学科普作家，在他的《好玩的数学》一书中，有一篇文章《五分钟挑出埃及分数》，文章告诉我们，古埃及人喜欢使用分子为1的分数（称为埃及分数）．则下列埃及分数$\frac{1}{1\times3}$、$\frac{1}{3\times5}$、$\frac{1}{5\times7}$、L、$\frac{1}{2021\times2023}$的和是（　）

A．$\frac{2022}{2023}$　　B．$\frac{2023}{2022}$　　C．$\frac{1011}{2023}$　　D．$\frac{2023}{1011}$

【答案】C

【分析】利用裂项相消法可求得结果.

【详解】当$n\in N_*$时，$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

因此，$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{2021\times2023}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1011}{2023}$.

故选：C.

11．(2022春·四川资阳·高一统考期末)《算法统宗》是中国古代数学名著，书中有这样一个问题：九百九十六斤棉，赠分八子做盘缠，次第每人多十七，要将第八数来言，务要分明依次弟，孝和休惹外人传．意为：996斤棉花，分别赠送给8个子女做旅费，从第二个开始，以后每人依次多17斤，直到第八个孩子为止．分配时一定要长幼分明，使孝顺子女的美德外传．据此，前五个孩子共分得的棉花斤数为（　）

A．362　　B．430　　C．495　　D．645

【答案】C

【分析】设这八个孩子分得棉花的斤数构成等差数列$\{a_n\}$，由题设求得其首项与公差，即可求得结果.

【详解】解：设这八个孩子分得棉花的斤数构成等差数列$\{a_n\}$，

由题意知：公差$d=17$，

又$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_8=8a_1+\frac{8\times7}{2}\times17=996$，解得$a_1=65$，

故$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=5\times65+\frac{5\times4}{2}\times17=495$.

故选：C.

12．(2022秋·江苏淮安·高三校考阶段练习）天干地支纪年法源于中国，中国自古便有十天干与十二地支．十天干即：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；十二地支即：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥.天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配，排列起来，天干在前，地支在后，天干由“甲”起，地支由“子”起，比如第一年为“甲子”，第二年为“乙丑”，第三年为“丙寅”，…，以此类推，排列到“癸酉”后，天干回到“甲”重新开始，即“甲戌”，“乙亥”，之后地支回到“子”重新开始，即“丙子”，…，以此类推，2022年是壬寅年，请问：在100年后的2122年为（　）

A．壬午年　　B．辛丑年　　C．已亥年　　D．戊戌年

【答案】A

【分析】将天干和地支分别看作等差数列，结合$100\div10=10$，$100\div12=8\cdots4$，分别求出100年后天干为壬，地支为午，得到答案.

【详解】由题意得：天干可看作公差为10的等差数列，地支可看作公差为12的等差数列，

由于$100 \div 10 = 10$，余数为 0，故 100 年后天干为壬，

由于$100 \div 12 = 8 \cdots 4$，余数为 4，故 100 年后地支为午，

综上：100 年后的 2122 年为壬午年.

故选：A

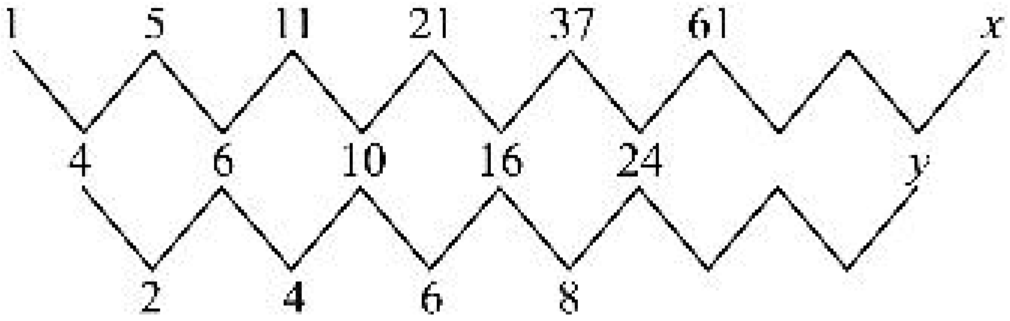
13．（2022 秋·江苏宿迁·高三沭阳县建陵高级中学校考期中）南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中，提出了一些新的垛积公式，所以论的高阶等差数列与一般等差数列不同，前后两项之差并不相等，但是逐项差数之差或者高次差成等差数列．对这类高阶等差数列的研究，在杨辉之后一般称为“垛积术”，现有高阶等差数列，其前 6 项分别为 1，5，11，21，37，61，……则该数列的第 8 项为（　）

A．99　　B．131　　C．139　　D．141

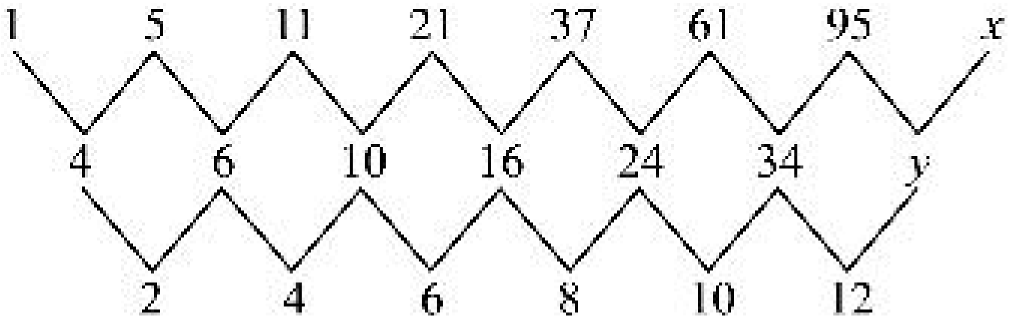
【答案】D

【分析】根据题中所给高阶等差数列定义，找出其一般规律即可求解.

【详解】设该高阶等差数列的第 8 项为x，根据所给定义，用数列的后一项减去前一项得到一个数列，得到的数列也用后一项减去前一项得到一个数列，即得到了一个等差数列，如图：



根据规律补全：



由图可得$\begin{cases} y - 34 = 12 \\ x - 95 = y \end{cases}$，则$\begin{cases} x = 141 \\ y = 46 \end{cases}$.

故选：D

14．（2023 春·广西柳州·高三统考阶段练习）《九章算术》中有一题：今有牛、马、羊、猪食人苗，苗主责之粟 9 斗，猪主曰：“我猪食半羊．”羊主曰：“我羊食半马．”马主曰：“我马食半牛．”今欲衰偿之，问各出几何？其意是：今有牛、马、羊、猪吃了别人的禾苗，禾苗主人要求赔偿 9 斗粟，猪主人说：“我猪所吃的禾苗只有羊的一半．”羊主人说：“我羊所吃的禾苗只有马的一半．”马主人说：“我马所吃的禾苗只有牛的一半．”打算按此比率偿还，牛、马、羊、猪的主人各应赔偿多少粟？在这个问题中，马主人比猪主人多赔偿了（　）斗．

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{9}{5}$　　C. 3　　D. $\frac{21}{5}$

【答案】B

【分析】转化为等比数列进行求解，设出未知数，列出方程，求出马主人比猪主人多赔偿了斗数.

【详解】由题意得：猪、羊、马、牛的主人赔偿的粟斗数成等比数列，公比为 2，

设猪的主人赔偿的粟斗数为 x，

则 $x+2x+4x+8x=9$，解得：$x=\frac{3}{5}$，

故马主人赔偿的粟斗数为 $4x=\frac{12}{5}$，

所以马主人比猪主人多赔偿了斗数为 $\frac{12}{5}-\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$.

故选：B

15.（2021 秋·河南商丘·高二校联考期中）《莉拉沃蒂》是古印度数学家婆什迦罗的数学名著，书中有下面的表述：某王为夺得敌人的大象，第一天行军 2 由旬（由旬为古印度长度单位），以后每天均比前一天多行相同的路程，七天一共行军 80 由旬到达地方城市.下列说法正确的是（　　）

A．前四天共行 $\frac{187}{7}$ 由旬

B．最后三天共行 53 由旬

C．从第二天起，每天比前一天多行的路程为 $\frac{23}{7}$ 由旬

D．第三天行了 $\frac{58}{7}$ 由旬

【答案】D

【分析】由题意，每天行军的路程 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=2$，$S_7=80$，利用基本量 a_1, d 表示可得 $d=\frac{22}{7}$，依次分析，即得解

【详解】由题意，不妨设每天行军的路程为数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=2$

又以后每天均比前一天多行相同的路程，故 $\{a_n\}$ 构成一个等差数列，不妨设公差为 d

七天一共行军 80 由旬，即 $S_7=80$

故 $S_7=7a_1+\frac{7\times 6}{2}d=80$，解得 $d=\frac{22}{7}$

$S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=\frac{188}{7}$，A 错误；

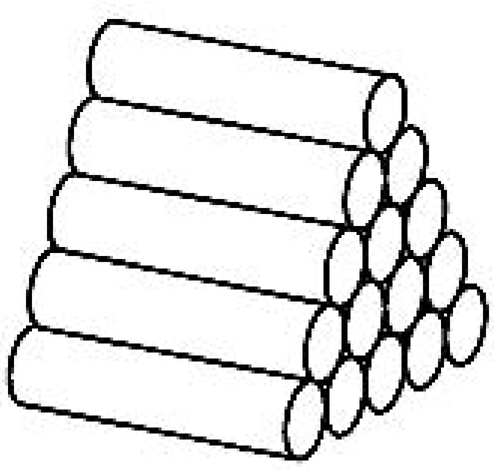
$a_5+a_6+a_7=S_7-S_4=80-\frac{188}{7}=\frac{372}{7}$，B 错误；

由于$d=\frac{22}{7}$，故从第二天起，每天比前一天多行的路程为$\frac{22}{7}$由旬，C 错误；

$a_3=a_1+2d=2+2\times\frac{22}{7}=\frac{58}{7}$，D 正确

故选：D

16．（2022·全国·高三专题练习）“垛积术”是由北宋科学家沈括在《梦溪笔谈》中首创，南宋数学家杨辉、元代数学家朱世杰丰富和发展的一类数列求和方法，有茭草垛、方垛、刍童垛、三角垛等．某仓库中部分货物堆放成如图所示的“茭草垛”：自上而下，第一层 1 件，以后每一层比上一层多 1 件，最后一层是 n 件．已知第一层货物单价 1 万元，从第二层起，货物的单价是上一层单价的$\frac{9}{10}$．若这堆货物总价是$100-200\left(\frac{9}{10}\right)^n$万元，则 n 的值为（　）



A．9　　　　B．10　　　　C．11　　　　D．12

【答案】B

【分析】先依次求出各层货物总价，再利用裂项抵消法进行求解．

【详解】由题意，得第一层货物总价为 1 万元，第二层货物总价为$2\times\frac{9}{10}$万元，

第三层货物总价为$3\times(\frac{9}{10})^2$万元，……，第n层货物总价为$n\times(\frac{9}{10})^{n-1}$万元．

设这堆货物总价为y万元，

则$y=1+2\times\frac{9}{10}+3\times(\frac{9}{10})^2+\cdots+n\times(\frac{9}{10})^{n-1}$

$\frac{9}{10}y=\frac{9}{10}+2\times(\frac{9}{10})^2+3\times(\frac{9}{10})^3+\cdots+n\times(\frac{9}{10})^n$，

两式相减，得$\frac{1}{10}y=1+\frac{9}{10}+(\frac{9}{10})^2+(\frac{9}{10})^3+\cdots+(\frac{9}{10})^{n-1}-n\times(\frac{9}{10})^n$，

即$\frac{1}{10}y=\frac{1-(\frac{9}{10})^n}{1-\frac{9}{10}}-n\cdot(\frac{9}{10})^n=10-10\times(\frac{9}{10})^n-n\cdot(\frac{9}{10})^n$,

则$y=100-100\times(\frac{9}{10})^n-10n\cdot(\frac{9}{10})^n=100-(100+10n)\times(\frac{9}{10})^n$,

令$y=100-(100+10n)\times(\frac{9}{10})^n=100-200\times(\frac{9}{10})^n$,

得$n=10$.

故选：B.

17.（2021秋·吉林松原·高二长岭县第三中学校考阶段练习）任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘3再加上1；若是偶数，就将该数除以2，反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈1→4→2→1. 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”等）．如取正整数$m=6$，根据上述运算法则得出6→3→10→5→16→8→4→2→1，共需经过8个步骤变成1（简称为8步“雹程”）．现给出冰雹猜想的递推关系如下：已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=m$（m为正整数），$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},当a_n为偶数时\\3a_n+1,当a_n为奇数时\end{cases}$，则当$m=42$时，则使$a_n=1$需要的雹程步数为（　）

A．7　　　　B．8　　　　C．9　　　　D．10

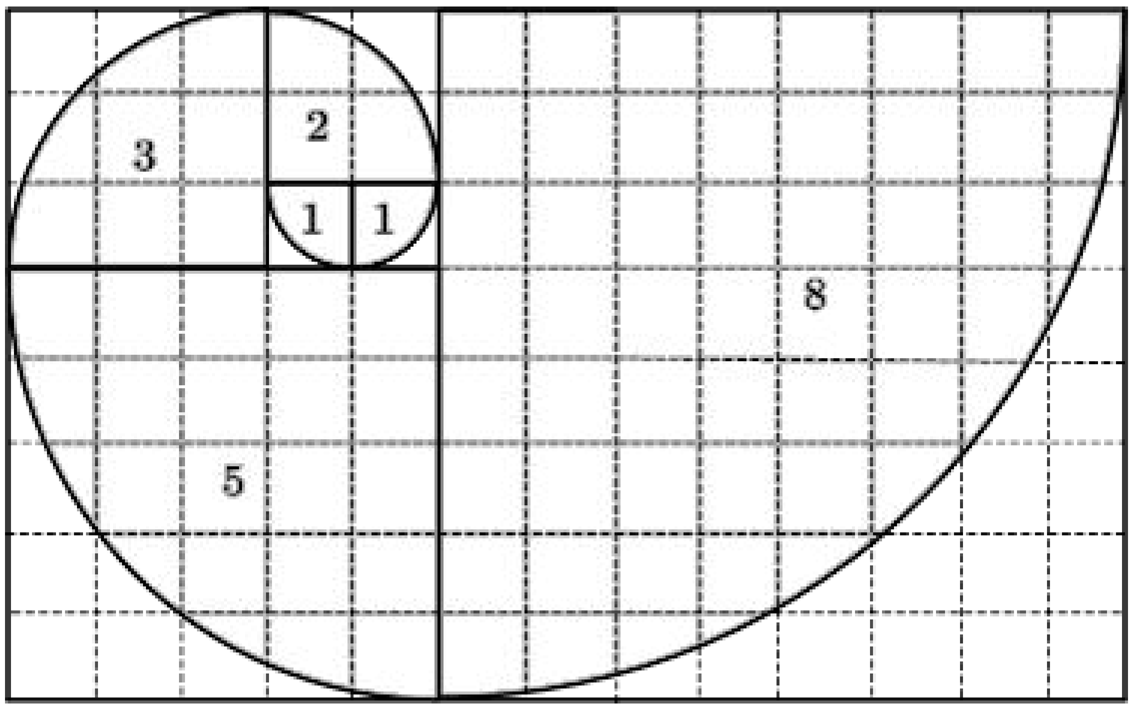
【答案】B

【分析】直接利用递推关系逐步计算可得$a_n=1$使得需要多少步雹程.

【详解】解：根据题意，当$m=42$，根据上述运算法则得出42→21→64→32→16→8→4→2→1，所以共需经过8个步骤变成1，故使$a_n=1$需要的雹程步数为8.

故选：B

18.（2022·全国·高三专题练习）意大利数学家列昂纳多·斐波那契是第一个研究了印度和阿拉伯数学理论的欧洲人，斐波那契数列被誉为是最美的数列，斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\left(n\geq3,n\in\mathbf{N}^*\right)$.若将数列的每一项按照下图方法放进格子里，每一小格子的边长为1，记前n项所占的格子的面积之和为S_n，每段螺旋线与其所在的正方形所围成的扇形面积为c_n，则其中不正确结论的是（　）



A. $S_{n+1}=a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot a_n$　　B. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$

C. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}-1$　　D. $4\left(c_n-c_{n-1}\right)=\pi a_{n-2}\cdot a_{n+1}\ (n\ge 3)$

【答案】C

【分析】A 选项由前$(n+1)$项所占格子组成长为a_n+a_{n+1}，宽为a_{n+1}的矩形即可判断；B 选项由$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\left(n\ge 3,n\in\mathbf{N}^*\right)$结合累加法即可判断；

C 选项通过特殊值检验即可；D 选项表示出$c_n=\frac{1}{4}\pi a_n^2,c_{n-1}=\frac{1}{4}\pi a_{n-1}^2$，作差即可判断.

【详解】由题意知：前$(n+1)$项所占格子组成长为a_n+a_{n+1}，宽为a_{n+1}的矩形，其面积为

$S_{n+1}=\left(a_n+a_{n+1}\right)a_{n+1}=a_na_{n+1}+a_{n+1}^2$，A 正确；

$a_3=a_2+a_1,a_4=a_3+a_2,\cdots,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，以上各式相加得，

$a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}=(a_2+a_3+\cdots+a_{n+1})+\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$，化简得$a_{n+2}-a_2=a_1+a_2+\cdots+a_n$，即

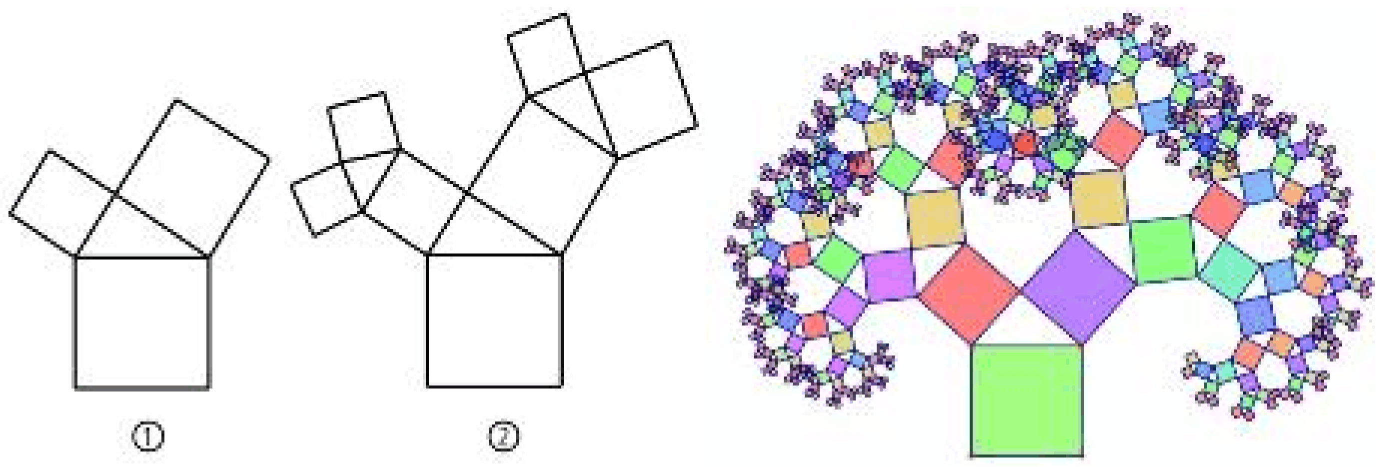
$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$，B 正确；

$a_1=a_2=1,a_3=2,a_4=3,a_5=5,a_6=8,\therefore a_1+a_3+a_5=8\ne a_6-1=7$，C 错误；

易知$c_n=\frac{1}{4}\pi a_n^2,c_{n-1}=\frac{1}{4}\pi a_{n-1}^2$，$\therefore 4(c_n-c_{n-1})=\pi\left(a_n^2-a_{n-1}^2\right)=\pi\left(a_n-a_{n-1}\right)\left(a_n+a_{n-1}\right)=\pi a_{n-2}a_{n+1}\ (n\ge 3)$，D 正确.

故选：C.

19.（2023·全国·高三专题练习）如图是美丽的“勾股树”，将一个直角三角形分别以它的每一条边向外作正方形而得到如图①的第 1 代“勾股树”，重复图①的作法，得到如图②的第 2 代“勾股树”，…，以此类推，记第 n 代“勾股树”中所有正方形的个数为a_n，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若不等式$S_n>2022$恒成立，则 n 的最小值为（　）



A．7　　　　　B．8　　　　　C．9　　　　　D．10

【答案】C

【分析】根据第 1 代“勾股树”，第 2 代“勾股树”中，正方形的个数，以此类推，得到第 n 代“勾股树”中所有正方形的个数，即 a_n，从而得到 S_n 求解.

【详解】解: 第 1 代“勾股树”中, 正方形的个数为 $3=2^{1+1}-1$, 第 2 代“勾股树”中, 正方形的个数为 $7=2^{2+1}-1$, …,

以此类推，第 n 代“勾股树”中所有正方形的个数为 $2^{n+1}-1$，即 $a_n=2^{n+1}-1$，

所以 $S_n=\dfrac{4\left(1-2^n\right)}{1-2}-n=2^{n+2}-n-4$，

因为 $a_n>0$，所以数列 $\{S_n\}$ 为递增数列，

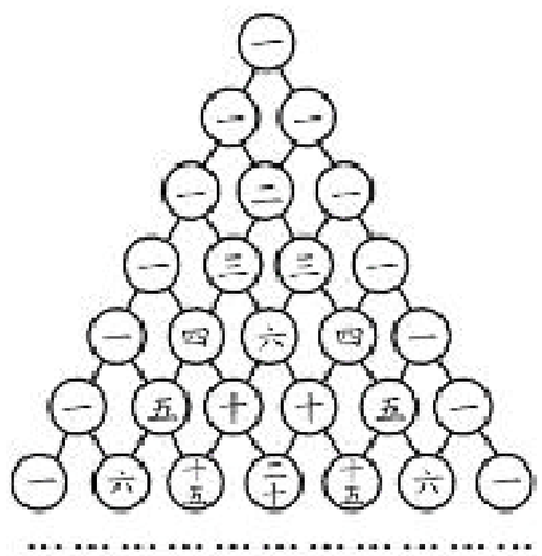
又 $S_8=1012<2022$，$S_9=2035>2022$，

所以 n 的最小值为 9.

故选：C.

20．(2022·海南省直辖县级单位·统考三模）北宋数学家贾宪创制的数字图式（如图）又称“贾宪三角”，后被南宋数学家杨辉引用、n 维空间中的几何元素与之有巧妙联系、例如，1 维最简几何图形线段它有 2 个 0 维的端点、1 个 1 维的线段：2 维最简几何图形三角形它有 3 个 0 维的端点，3 个 1 维的线段，1 个 2 维的三角形区域；……如下表所示.从 1 维到 6 维最简几何图形中，所有 1 维线段数的和是（　）

元素维度 几何体维度	0	1	2	3	…
$n=1$ （线段）	2	1			
$n=2$ （三角形）	3	3	1		
$n=3$ （四面体）	4	6	4	1	



…	…	…	…	…	…

A. 56　　B. 70　　C. 84　　D. 28

【答案】A

【分析】根据题意可得$a_n - a_{n-1} = n$，可求得$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$，即可求解.

【详解】设从 1 维到n维最简几何图形的 1 维线段数构成数列$\{a_n\}$，

由题意可得$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$，$a_3 - a_2 = 6 - 3 = 3$，$a_4 - a_3 = 10 - 6 = 4$，…，

以此类推，可得$a_n - a_{n-1} = n$，

所以$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$，

所以$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$.

故选：A.

21．（2023·全国·高三专题练习）大衍数列，来源于中国古代著作《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论.其前10项为：0、2、4、8、12、18、24、32、40、50，通项公式为$a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{2}, n\text{为奇数} \\ \frac{n^2}{2}, n\text{为偶数} \end{cases}$，若把这个数列$\{a_n\}$排成下侧形状，并记$A(m,n)$表示第$m$行中从左向右第$n$个数，则$A(9,5)$的值为（　）

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 2 & 4 & 8 & & \\ & 12 & 18 & 24 & 32 & 40 & \\ 50 & \cdots\cdots & & & & & \end{array}$$

A. 2520　　B. 2312

C. 2450　　D. 2380

【答案】D

【分析】确定$A(9,5)$在数列$\{a_n\}$中的项数，结合数列$\{a_n\}$的通项公式可求得结果.

【详解】由题可知，设数阵第n行的项数为b_n，则数列$\{b_n\}$是以1为首项，公差为2的等差数列，

数列$\{b_n\}$的前8项和为$1\times8+\frac{8\times7}{2}\times2=64$，

所以，$A(9,5)$是数列$\{a_n\}$的第$64+5=69$项，因此，$A(9,5)=\frac{69^2-1}{2}=2380$.

故选：D.

22.（2022·全国·高三专题练习）在归国包机上，孟晚舟写下《月是故乡明，心安是归途》，其中写道“过去的1028天，左右踟躇，千头万绪难抉择；过去的1028天，日夜徘徊，纵有万语难言说；过去的1028天，山重水复，不知归途在何处．”“感谢亲爱的祖国，感谢党和政府，正是那一抹绚丽的中国红，燃起我心中的信念之火，照亮我人生的至暗时刻，引领我回家的漫长路途．”下列数列$\{a_n\}(n\in N^*)$中，其前n项和不可能为1028的数列是（　）

(参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

A．$a_n=10n+28$　　　　B．$a_n=4n^2-12n+\frac{74}{5}$

C．$a_n=(-1)^{n+1}n^2-\frac{7}{45}$　　　　D．$a_n=2^{n-1}+\frac{1}{2}$

【答案】A

【分析】利用等差数列、等比数列的前n项和公式以及参考公式求数列$\{a_n\}$前n项和S_n，令$S_n=1028$，看是否有正整数解即可判定选项A、B、D的正确性；通过分类讨论分别求出S_{2k}和S_{2k-1}，然后可得到$S_{2k}<0$，令$S_{2k-1}=1028$，看是否有正整数解即可选项C的正确性.

【详解】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，

对于A：由等差数列的前n项和公式，得：

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n(5n+33)=1028$，

因为方程无正整数解，即选项A错误；

对于B：不妨令$b_n=4n^2$，$c_n=-12n+\frac{74}{5}$，

数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$的前n项和分别为T_n和Q_n，

则$a_n=b_n+c_n$，$S_n=T_n+Q_n$，

由参考公式和等差数列的前n项和公式，得：

$T_n=4(1+2+3+\cdots+n^2)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$，

$Q_n=\frac{n(c_1+C_n)}{2}=-6n^2+\frac{44}{5}n$，

所以$S_n=T_n+Q_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-6n^2+\frac{44}{5}n=1028$，

解得$n=10\in N^*$，即选项 B 正确；

对于 C：①当$n=2k(k\in N^*)$时，

$S_n=S_{2k}=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2-\frac{7}{45}\times 2k$

$=-(3+7+\cdots+4k-1)-\frac{14k}{45}<0$，故此时$S_n\neq 1028$；

②当$n=2k-1\left(k\in N^*\right)$时，

$S_n=S_{2k-1}=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-3)^2-(2k-2)^2+(2k-1)^2-\frac{7}{45}(2k-1)$

$=-(3+7+\cdots+4k-5)+(2k-1)^2-\frac{7}{45}(2k-1)$

$=-\frac{(k-1)(3+4k-5)}{2}+(2k-1)^2-\frac{7}{45}(2k-1)$

$=2k^2-3k+2-\frac{7}{45}(2k-1)$

令$2k^2-3k+2-\frac{7}{45}(2k-1)=1028$，解得$k=23$，

即$n=2\times 23-1=45$时，$S_n=1028$，

即选项 C 正确；

对于 D：由等比数列的前n项和公式可知，

$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}+\frac{1}{2}n=2^n+\frac{1}{2}n-1=1028$，

解得$n=10\in N^*$，即选项 D 正确.

故选：A.

23．（2023·全国·高三专题练习）大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和，是中华传统文化中隐藏的世界数学史上第一道数列题．其前 10 项依次是 0、2、4、8、12、18、24、32、40、50，则此数列的第 21 项是（　）

A．200　　B．210　　C．220　　D．242

【答案】C

【分析】由数列奇数项的前几项可归纳出奇数项上的通项公式，从而得到答案.

【详解】根据题意，数列的前 10 项依次是 0、2、4、8、12、18、24、32、40、50，其中奇数项为 0、4、

12、24、40，有 $a_1=\frac{1^2-1}{2}=0,a_3=\frac{3^2-1}{2}=4,a_5=\frac{5^2-1}{2}=12,a_7=\frac{7^2-1}{2}=24,\dots$

故其奇数项上的通项公式为 $a_n=\frac{n^2-1}{2}$，故 $a_{21}=\frac{21^2-1}{2}=220$，

故选：C

24.（2022春·云南红河·高二弥勒市一中校考阶段练习）斐波那契数列（*Fibonacci Sequence*）又称黄金分割数列，因数学家列昂纳多，斐波那契（*Leonardo Fibonacci*）以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”．在数学上，斐波纳契数列被以下递推的方法定义：数列$\{a_n\}$满足：$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，现从数列的前 2022 项中随机抽取 1 项，能被 3 整除的概率是（　）

A．$\frac{505}{2022}$　　B．$\frac{252}{2022}$　　C．$\frac{504}{2022}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】A

【分析】依次写出数列各项除以 3 所得余数，寻找后可得结论．

【详解】根据斐波那契数列的定义，数列各项除以 3 所得余数依次为 1，1，2，0，2，2，1，0，1，1，2，…，余数数列是周期数列，周期为 8，$2022=252\times8+6$，所以数列的前 2022 项中能被 3 整除的项有 $252\times2+1=505$，

所求概率为 $P=\frac{505}{2022}$，

故选 A．

25.（2022·高二课时练习）分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学，它的研究对象普遍存在于自然界中，因此又被称为“大自然的几何学”．按照如图 1 所示的分形规律，可得如图 2 所示的一个树形图．若记图 2 中第 n 行黑圈的个数为 a_n，则 $a_6=$（　）

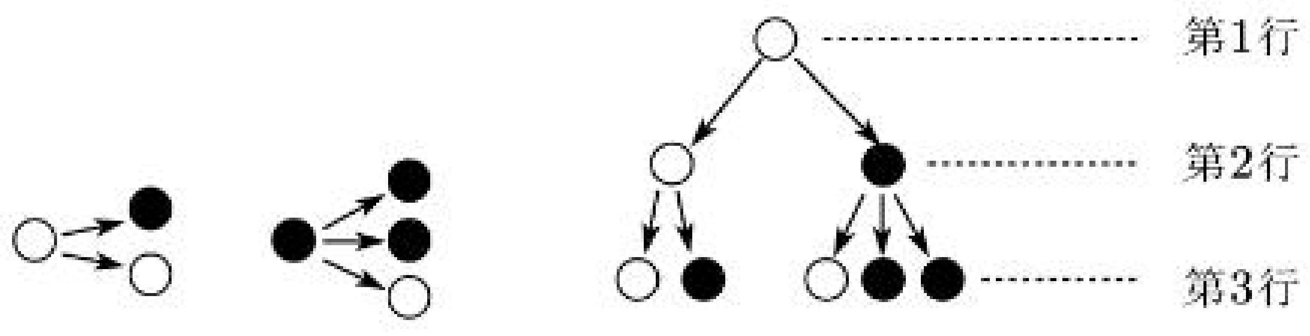


图1　　图2

A．55　　B．58　　C．60　　D．62

【答案】A

【分析】a_n 表示第 n 行中的黑圈个数，设 b_n 表示第 n 行中的白圈个数，由题意可得 $a_{n+1}=2a_n+b_n,b_{n+1}=a_n+b_n$，根据初始值，由此递推，不难得出所求．

【详解】已知 a_n 表示第 n 行中的黑圈个数，设 b_n 表示第 n 行中的白圈个数，则由于每个白圈产生下一行的

一白一黑两个圈，一个黑圈产生下一行的一个白圈 2 个黑圈，

$\therefore a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=a_n+b_n$，

又$\because a_1=0, b_1=1$

$a_2=1, b_2=1$

$a_3=2\times1+1=3,\ \ b_3=1+1=2$

$a_4=2\times3+2=8, b_4=3+2=5$

$a_5=2\times8+5=21, b_5=8+5=13$

$a_6=2\times21+13=55$，

故选：A.

26.（2022·全国·高三专题练习）如图 1 所示，古筝有多根弦，每根弦下有一个雁柱，雁柱用于调整音高和音质.图 2 是根据图 1 绘制的古筝弦及其雁柱的简易平面图.在图 2 中，每根弦都垂直于 x 轴，相邻两根弦间的距离为 1，雁柱所在曲线的方程为 $y=1.1^x$，第 n 根弦（$n\in N$，从左数第 1 根弦在 y 轴上，称为第 0 根弦）分别与雁柱曲线和直线 $l: y=x+1$ 交于点 A_n（x_n，y_n）和 B_n（x_n'，y_n'），则 $\sum_{n=0}^{20} y_n y_n' =$(　　)

参考数据：取 $1.1^{22}=8.14$.

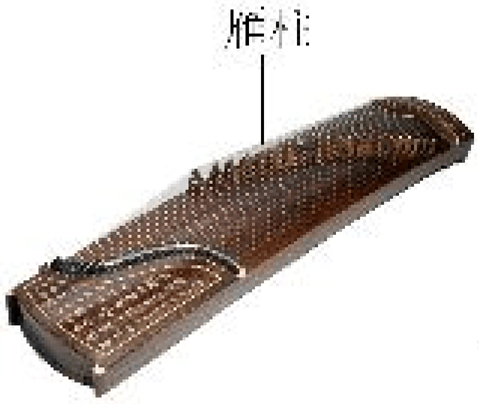


图1

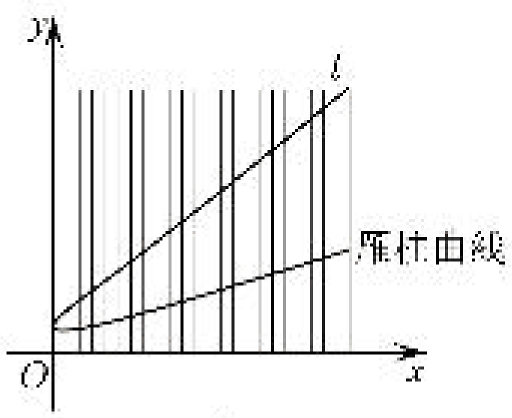


图2

A．814　　B．900　　C．914　　D．1000

【答案】C

【分析】求出 y_n、y_n'，用错位相减法求和即可.

【详解】由条件可得 $\sum_{n=0}^{20} y_n y_n' = \sum_{n=0}^{20}(n+1)1.1^n = 1\times1.1^0+2\times1.1^1+\cdots+20\times1.1^{19}+21\times1.1^{20}$①，

所以 $1.1\times\sum_{n=0}^{20} y_n y_n' = 1\times1.1^1+2\times1.1^2+\cdots+20\times1.1^{20}+21\times1.1^{21}$②，

－②得：

$-0.1\times\sum_{n=0}^{20} y_n y_n' = 1.1^0+1.1^1+\cdots+1.1^{20}-21\times1.1^{21} = \dfrac{1-1.1^{21}}{1-1.1}-21\times1.1^{21}$，

$=\dfrac{1-1.1^{21}+0.1\times21\times1.1^{21}}{-0.1}=\dfrac{1+1.1^{22}}{-0.1}=\dfrac{1+8.14}{-0.1}=-91.4$，

所以$\sum_{n=0}^{20} y_n y'_n = 914$.

故选：C.

27.（2022 秋·陕西渭南·高二校考期中）图 1 是中国古代建筑中的举架结构，AA'，BB'，CC'，DD'是桁，相邻桁的水平距离称为步，垂直距离称为举．图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图，其中DD_1，CC_1，BB_1，AA_1是举，OD_1，DC_1，CB_1，BA_1是相等的步，相邻桁的举步之比分别为$\frac{DD_1}{OD_1}=0.5$，$\frac{CC_1}{DC_1}=k_1$，$\frac{BB_1}{CB_1}=k_2$，$\frac{AA_1}{BA_1}=k_3$，已知k_1，k_2，k_3成公差为 0.1 的等差数列，且直线OA的斜率为 0.725，则$k_2 =$（　）

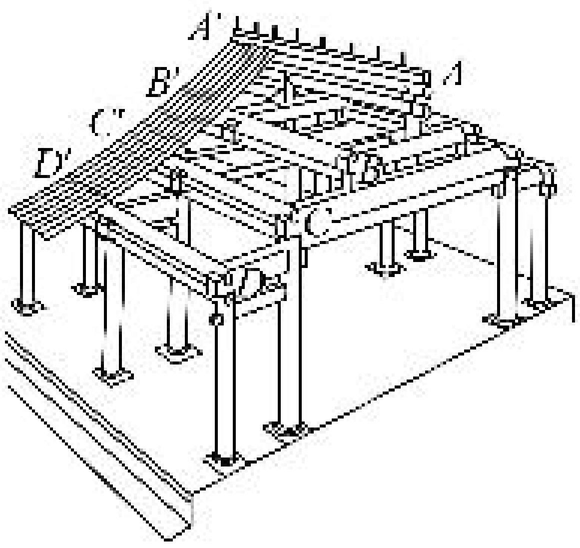


图1

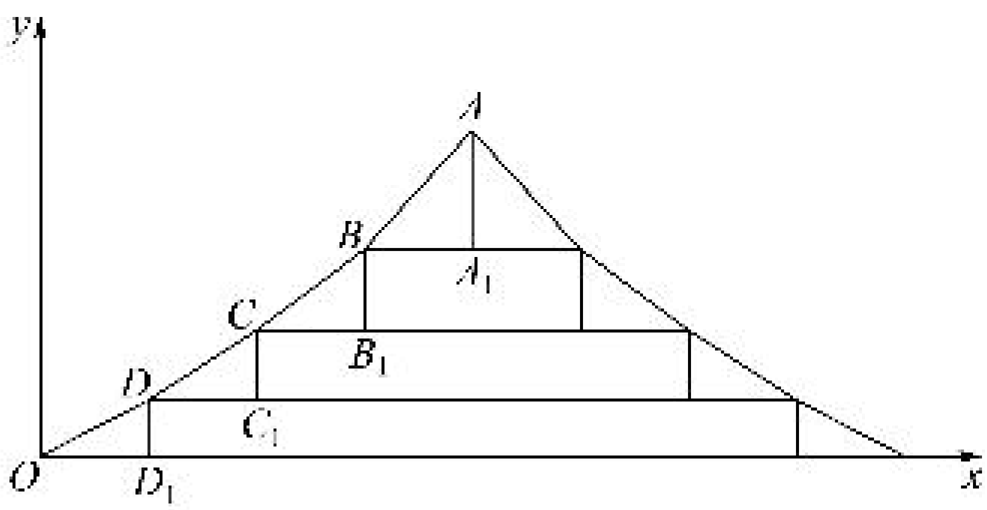


图2

A．0.75　　B．0.8　　C．0.85　　D．0.9

【答案】B

【分析】设$OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1 = 1$，则可得关于$k_2$的方程，求出其解后可得正确的选项

【详解】设$OD_1 = DC_1 = CB_1 = BA_1 = 1$，则$DD_1 = 0.5, CC_1 = k_1, BB_1 = k_2, AA_1 = k_3$，

依题意，有$k_2 - 0.1 = k_1, k_2 + 0.1 = k_3$，且$\frac{DD_1 + CC_1 + BB_1 + AA_1}{OD_1 + DC_1 + CB_1 + BA_1} = 0.725$，

所以$\frac{0.5 + 3k_2}{4} = 0.725$，故$k_2 = 0.8$，

故选：B

28.（2022 秋·陕西咸阳·高二校考阶段练习）《张邱建算经》记载了这样一个问题："今有马行转迟，次日减半，疾七日，行七百里"，意思是"有一匹马行走的速度逐渐变慢，每天走的路程是前一天的一半，连续走了 7 天，共走了 700 里"．在上述问题中，此马第二天所走的路程大约为（　）

A．170 里　　B．180 里　　C．185 里　　D．176 里

【答案】D

【分析】根据题意，可知此马每天走的路程形成等比数列，利用等比数列的前n项和公式求得基本量，从而得解.