青海省大通回族土族自治县第一完全中学2024年高考数学五模试卷

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．在一个数列中，如果 $\forall n\in N^*$，都有 $a_na_{n+1}a_{n+2}=k$（k 为常数），那么这个数列叫做等积数列，k 叫做这个数列的公积.已知数列 $\{a_n\}$ 是等积数列，且 $a_1=1$，$a_2=2$，公积为 8，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=$（　　）

A． 4711　　**B．** 4712　　**C．** 4713　　**D．** 4715

2．已知复数 z 满足 $(z-i)(-i)=5$，则 $z=$（　　）

A． $6i$　　**B．** $-6i$　　**C．** -6　　**D．** 6

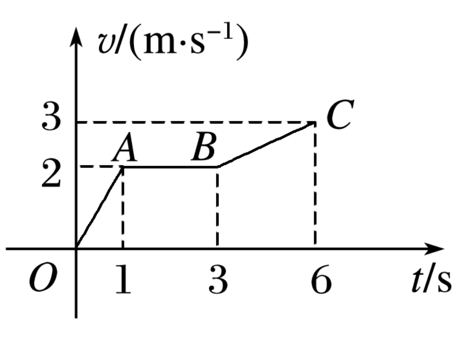
3．已知点 F_1 是抛物线 C：$x^2=2py$ 的焦点，点 F_2 为抛物线 C 的对称轴与其准线的交点，过 F_2 作抛物线 C 的切线，切点为 A，若点 A 恰好在以 F_1，F_2 为焦点的双曲线上，则双曲线的离心率为（　　）

A． $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　　**B．** $\sqrt{2}-1$　　**C．** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　**D．** $\sqrt{2}+1$

4．已知 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_3(x+1)\right|, x\in(-1,8)\\ \dfrac{4}{x-6}, x\in[8,+\infty)\end{cases}$ 若 $f[(m-1)f(x)]-2\le 0$ 在定义域上恒成立，则 m 的取值范围是（　　）

A． $(0,+\infty)$　　**B．** $[1,2)$　　**C．** $[1,+\infty)$　　**D．** $(0,1)$

5．一物体作变速直线运动，其 $v-t$ 曲线如图所示，则该物体在 $\dfrac{1}{2}\text{s}\sim 6\text{s}$ 间的运动路程为（　　）***m***.



A． **1**　　**B．** $\dfrac{4}{3}$　　**C．** $\dfrac{49}{4}$　　**D．** **2**

6．已知x,y满足$\begin{cases}x-y\ldots 0\\x+y\ldots 0\\x\ldots 1\end{cases}$，则$\dfrac{y-3}{x-2}$的取值范围为（　　）

A．$\left[\dfrac{3}{2},4\right]$　　B．$(1,2]$　　C．$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$　D．$(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$

7．函数$f(x)=2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)^2-2$的一个单调递增区间是（　　）

A．$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$　　C．$\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8}\right]$　　D．$\left[\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{9\pi}{8}\right]$

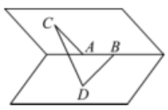
8．在ΔABC中，D在边AC上满足$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$E$为$BD$的中点，则$\overrightarrow{CE}=$（　　）．

A．$\dfrac{7}{8}\overrightarrow{BA}-\dfrac{3}{8}\overrightarrow{BC}$　　B．$\dfrac{3}{8}\overrightarrow{BA}-\dfrac{7}{8}\overrightarrow{BC}$　　C．$\dfrac{3}{8}\overrightarrow{BA}+\dfrac{7}{8}\overrightarrow{BC}$　　D．$\dfrac{7}{8}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

9．设椭圆E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右顶点为***A***，右焦点为***F***，***B***、***C***为椭圆上关于原点对称的两点，直线***BF***交直线***AC***于***M***，且***M***为***AC***的中点，则椭圆***E***的离心率是（　　）

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{4}$

10．如图在一个60°的二面角的棱有两个点A,B，线段AC,BD分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于棱AB，且$AB=AC=2,BD=4$，则CD的长为（　　）



A．4　　B．$2\sqrt{5}$　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

11．已知函数***f***(***x***)＝$\begin{cases}-x^2-2x+3,x\le 1\\\ln x,x>1\end{cases}$,若关于***x***的方程***f***(***x***)＝***kx***－$\dfrac{1}{2}$恰有4个不相等的实数根，则实数***k***的取值范围是(　　)

A．$\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{e}\right)$　　B．$\left[\dfrac{1}{2},\sqrt{e}\right)$

C．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right]$　　D．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

12．若$z=1+(1-a)i$（$a\in R$），$|z|=\sqrt{2}$，则$a=$（　　）

A．0或2　　B．0　　C．1或2　　D．1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数，且 $f(x)+g(x)=(x+1)^2-2^{x+1}$，则 $f(1)-g(1)=$________

14．设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过点 F 且倾斜角为 45°的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A，B 两点若 $\overrightarrow{FB}=3\overrightarrow{FA}$，则 C 的离心率为________.

15．已知 F 是抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N．若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$________.

16．若函数 $f(x)=x^2+\dfrac{ax^2}{2^x+1}$ 为奇函数，则 $a=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）若数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $\{S_n\}$，且满足 $S_n=\dfrac{t}{t-1}(a_n-2)$（$t$ 为常数，且 $t\neq 0,t\neq 1$）

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

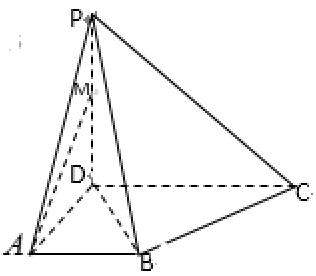
（2）设 $b_n=1-S_n$，且数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，令 $c_n=a_n\left|\log_3 b_n\right|$，.求证：$c_1+c_2+\ldots+c_n<\dfrac{3}{2}$.

18．（12 分）已知抛物线 $C:x^2=4y$ 与直线 $l:x-2y-2=0$.

（1）求抛物线 C 上的点到直线 l 距离的最小值；

（2）设点 $P(x_0,y_0)$ 是直线 l 上的动点，$Q(1,1)$ 是定点，过点 P 作抛物线 C 的两条切线，切点为 A，B，求证 A，Q，B 共线；并在 $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{QB}$ 时求点 P 坐标.

19．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，M 为侧棱 PD 上一点，已知 $BD=2,BC=2\sqrt{3},CD=4,DP=4,DM=3$.



（Ⅰ）证明:平面 $PBC\perp$ 平面 PBD；

（Ⅱ）求二面角 $A-BM-C$ 的余弦值.

20．（12 分）已知函数 $f(x)=x^2-2x\ln x$，函数 $g(x)=x+\dfrac{a}{x}-(\ln x)^2$，其中 $a\in R$，x_0 是 $g(x)$ 的一个极值点，且 $g(x_0)=2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性

（2）求实数 x_0 和 **a** 的值

（3）证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4k^2-1}}>\frac{1}{2}\ln(2n+1)\quad\left(n\in N^*\right)$

21.（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2(a>0)$（其中 $\mathrm{e}=2.718\cdots$ 是自然对数的底数）

（1）若 $f(x)$ 在 ***R*** 上单调递增，求正数 ***a*** 的取值范围；

（2）若 $f(x)$***f***（***x***）在 $x=x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ 处导数相等，证明：$x_1+x_2<2\ln 2a$；

（3）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，证明：对于任意 $k\le\frac{1}{e}+1$，若 $b<\frac{1}{2}$，则直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点（注：当 $k>1$ 时，直线 $y=x+k$ 与曲线 $y=e^x$ 的交点在 ***y*** 轴两侧）.

22.（10 分）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x-1}{ae^x}-1\left(a\in R,a\ne0\right)$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 没有零点，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

计算出 a_3 的值，推导出 $a_{n+3}=a_n\ \left(n\in N^*\right)$，再由 $2020=3\times673+1$，结合数列的周期性可求得数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 2020 项和.

【详解】

由题意可知 $a_na_{n+1}a_{n+2}=8$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\ne0$，则 $a_1a_2a_3=8$，$\therefore a_3=\frac{8}{a_1a_2}=4$，

由 $a_na_{n+1}a_{n+2}=8$，得 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=8$，$\therefore a_na_{n+1}a_{n+2}=a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$，$\therefore a_{n+3}=a_n$， Q $2020 = 3\times 673+1$，因此，$a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=673\left(a_1+a_2+a_3\right)+a_1=673\times 7+1=4712$．

故选：**B.**

【点睛】

本题考查数列求和，考查了数列的新定义，推导出数列的周期性是解答的关键，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

2、**A**

【解析】

由复数的运算法则计算.

【详解】

因为 $(z-i)(-i)=5$，所以 $z=\dfrac{5}{-i}+i=6i$

故选：**A**.

【点睛】

本题考查复数的运算．属于简单题.

3、**D**

【解析】

根据抛物线的性质，设出直线方程，代入抛物线方程，求得 k 的值，设出双曲线方程，求得 $2a$＝｜AF_2｜﹣｜AF_1｜＝（$\sqrt{2}-1$）p，利用双曲线的离心率公式求得 e.

【详解】

直线 F_2A 的直线方程为：$y=kx-\dfrac{p}{2}$，F_1（0，$\dfrac{p}{2}$），F_2（0，$-\dfrac{p}{2}$），

代入抛物线 C：$x^2=2py$ 方程，整理得：$x^2-2pkx+p^2=0$，

∴$\Delta=4k^2p^2-4p^2=0$，解得：$k=\pm 1$，

∴A（p，$\dfrac{p}{2}$），设双曲线方程为：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，

｜AF_1｜＝p，｜AF_2｜$=\sqrt{p^2+p^2}=\sqrt{2}p$，

$2a$＝｜AF_2｜﹣｜AF_1｜＝（$\sqrt{2}-1$）p，

$2c=p$，

∴离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，

故选：D.

【点睛】

本题考查抛物线及双曲线的方程及简单性质，考查转化思想，考查计算能力，属于中档题.

4、**C**

【解析】

先解不等式 $f\left(x\right)\le 2$，可得出 $x\ge -\frac{8}{9}$，求出函数 $y=f\left(x\right)$ 的值域，由题意可知，不等式 $\left(m-1\right)f\left(x\right)\ge -\frac{8}{9}$ 在定义域上恒成立，可得出关于 m 的不等式，即可解得实数 m 的取值范围.

【详解】

Q $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\log_3\left(x+1\right)\right|, x\in\left(-1,8\right)\\ \frac{4}{x-6}, x\in\left[8,+\infty\right)\end{cases}$，先解不等式 $f\left(x\right)\le 2$.

①当 $-1<x<8$ 时，由 $f\left(x\right)=\left|\log_3\left(x+1\right)\right|\le 2$，得 $-2\le\log_3\left(x+1\right)\le 2$，解得 $-\frac{8}{9}\le x\le 8$，此时 $-\frac{8}{9}\le x<8$；

②当 $x\ge 8$ 时，由 $f\left(x\right)=\frac{4}{x-6}\le 2$，得 $x\ge 8$.

所以，不等式 $f\left(x\right)\le 2$ 的解集为 $\left\{x\left|x\ge -\frac{8}{9}\right.\right\}$.

下面来求函数 $y=f\left(x\right)$ 的值域.

当 $-1<x<8$ 时，$0<x+1<9$，则 $\log_3\left(x+1\right)<2$，此时 $f\left(x\right)=\left|\log_3\left(x+1\right)\right|\ge 0$；

当 $x\ge 8$ 时，$x-6\ge 2$，此时 $f\left(x\right)=\frac{4}{x-6}\in\left(0,2\right]$.

综上所述，函数 $y=f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,+\infty\right)$，

由于 $f\left[\left(m-1\right)f\left(x\right)\right]-2\le 0$ 在定义域上恒成立，

则不等式 $\left(m-1\right)f\left(x\right)\ge -\frac{8}{9}$ 在定义域上恒成立，所以，$m-1\ge 0$，解得 $m\ge 1$.

因此，实数 m 的取值范围是 $\left[1,+\infty\right)$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查利用函数不等式恒成立求参数，同时也考查了分段函数基本性质的应用，考查分类讨论思想的应用，属于中等题.

5、**C**

【解析】

由图像用分段函数表示$v(t)$，该物体在$\frac{1}{2}$s~6s间的运动路程可用定积分$s=\int_{\frac{1}{2}}^{6}v(t)\mathrm{d}t$表示，计算即得解

【详解】

由题中图像可得，

$$v(t)=\begin{cases}2t,0\le t<1\\2,1\le t\le 3\\\frac{1}{3}t+1,3<t\le 6\end{cases}$$

由变速直线运动的路程公式，可得

$$s=\int_{\frac{1}{2}}^{6}v(t)\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2tdt+\int_{1}^{3}2\mathrm{d}t+\int_{3}^{6}\left(\frac{1}{3}t+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+2t\Big|_{1}^{3}+\left(\frac{1}{6}t^2+t\right)\Big|_{3}^{6}=\frac{49}{4}(\mathrm{m}).$$

所以物体在$\frac{1}{2}$s~6s间的运动路程是$\frac{49}{4}$m.

故选：**C**

【点睛】

本题考查了定积分的实际应用，考查了学生转化划归，数形结合，数学运算的能力，属于中档题.

6、**C**

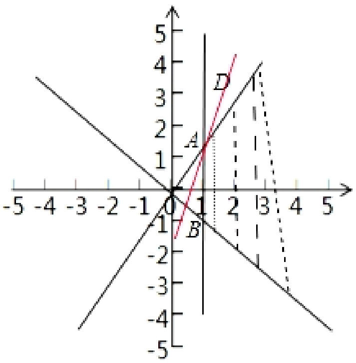
【解析】

设$k=\frac{y-3}{x-2}$，则k的几何意义为点(x,y)到点$(2,3)$的斜率，利用数形结合即可得到结论.

【详解】

解：设$k=\frac{y-3}{x-2}$，则k的几何意义为点$P(x,y)$到点$D(2,3)$的斜率，

作出不等式组对应的平面区域如图：



由图可知当过点D的直线平行于x轴时，此时$k=\dfrac{y-3}{x-2}=0$成立；

$k=\dfrac{y-3}{x-2}$取所有负值都成立；

当过点A时，$k=\dfrac{y-3}{x-2}$取正值中的最小值，$\begin{cases}x=1\\x-y=0\end{cases}\Rightarrow A(1,1)$，此时$k=\dfrac{y-3}{x-2}=\dfrac{1-3}{1-2}=2$；

故$\dfrac{y-3}{x-2}$的取值范围为$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$；

故选：***C.***

【点睛】

本题考查简单线性规划的非线性目标函数函数问题，解题时作出可行域，利用目标函数的几何意义求解是解题关键．对于直线斜率要注意斜率不存在的直线是否存在．

7、D

【解析】

利用同角三角函数的基本关系式、二倍角公式和辅助角公式化简$f\left(x\right)$表达式，再根据三角函数单调区间的求法，求得$f\left(x\right)$的单调区间，由此确定正确选项.

【详解】

因为$f(x)=2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)^2-2$

$=1+\cos 2x+1+\sin 2x-2=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，由$f(x)$单调递增，则$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），解得$k\pi-\dfrac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{8}$（$k\in\mathbf{Z}$），当$k=1$时，**D**选项正确**.C**选项是递减区间，**A**，**B**选项中有部分增区间部分减区间**.**

故选：**D**

【点睛】

本小题考查三角函数的恒等变换，三角函数的图象与性质等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识.

8、B

【解析】

由 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，可得 $\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA})$，再将 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$ 代入即可.

【详解】

因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$，故 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CA})=$

$\frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC})=\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}-\frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查平面向量的线性运算性质以及平面向量基本定理的应用，是一道基础题.

9、C

【解析】

连接 OM，OM 为 ΔABC 的中位线，从而 $\Delta OFM∽\Delta AFB$，且 $\frac{|OF|}{|FA|}=\frac{1}{2}$，进而 $\frac{c}{a-c}=\frac{1}{2}$，由此能求出椭圆的离心率.

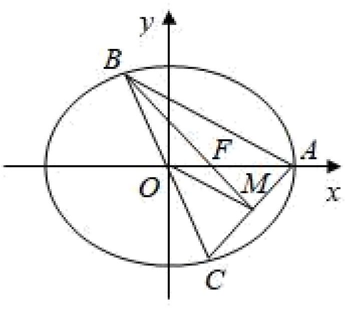
【详解】

如图，连接 OM，

$\because$ 椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右顶点为 *A*，右焦点为 *F*，

B、*C* 为椭圆上关于原点对称的两点，不妨设 *B* 在第二象限，

直线 *BF* 交直线 *AC* 于 *M*，且 *M* 为 *AC* 的中点



$\therefore OM$ 为 ΔABC 的中位线，

$\therefore \Delta OFM∽\Delta AFB$，且 $\frac{|OF|}{|FA|}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{c}{a-c}=\dfrac{1}{2}$，

解得椭圆 E 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$.

故选：**C**

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质，考查了运算求解能力，属于基础题.

10、**A**

【解析】

由 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，两边平方后展开整理，即可求得 $\overrightarrow{CD}^2$，则 CD 的长可求.

【详解】

解：$\because \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$，

$\because \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}|\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}\times2\times4=-4$.

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=4+4+16-2\times4=16$，

$\therefore|\overrightarrow{CD}|=4$，

故选：A.

【点睛】

本题考查了向量的多边形法则、数量积的运算性质、向量垂直与数量积的关系，考查了空间想象能力，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

11、**D**

【解析】

由已知可将问题转化为：$y=f(x)$的图象和直线 $y=kx-\dfrac{1}{2}$ 有 4 个交点，作出图象，由图可得：点(1,0)必须在直线 $y=kx-\dfrac{1}{2}$ 的下方，即可求得：$k>\dfrac{1}{2}$；再求得直线 $y=kx-\dfrac{1}{2}$ 和 $y=\ln x$ 相切时，$k=\dfrac{\sqrt{e}}{e}$；结合图象即可得解.

【详解】

若关于 x 的方程 $f(x)=kx-\dfrac{1}{2}$ 恰有 4 个不相等的实数根，