山东省淄博第六中学2023-2024学年高一下学期期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在复平面内，复数$z=\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$（i是虚数单位）对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知向量$\vec{a}=(x,2)$，$\vec{b}=(3,-1)$.若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$x=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．-3　　D．-6

3．要想得到函数$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象，只需将函数$y=\sin x$的图象上所有的点

A．先向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变

B．先向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变

C．横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

D．横坐标变伸长原来的2倍，纵坐标不变，再向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

4．已知向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，则（　　）

A．A，B，D三点共线　　B．A，B，C三点共线

C．B，C，D三点共线　　D．A，C，D三点共线

5．下列说法不正确的是（　　）

A．若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线

B．若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线

C．若 $\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=A$，则 $A\in l$

D．两两相交且不共点的三条直线确定一个平面

6．$\dfrac{1+\tan 190^{\circ}}{1-\tan 370^{\circ}}-\dfrac{2\cos 70^{\circ}}{\sin 40^{\circ}}=$（　）

A．$\tan 20^{\circ}$　　B．$\tan 70^{\circ}$　　C．$-\tan 10^{\circ}$　　D．$-\tan 40^{\circ}$

7．在 ΔABC 中，$\dfrac{c-a}{2c}=\sin^{2}\dfrac{B}{2}$($a$、$b$、$c$ 分别为角 A、B、C 的对边),则 ΔABC 的形状为

A．直角三角形　　B．等边三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　D．等腰直角三角形

8．法国数学家棣莫弗（1667-1754 年）发现了棣莫弗定理：设两个复数

$z_1=r_1\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right)$，$z_2=r_2\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right)$，（$r_1$，$r_2>0$）则

$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$．设 $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 z^{2024} 的虚部为（　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

二、多选题

9．设 z_1、z_2 为复数，且 $z_1\neq z_2$，下列命题中正确的是（　）

A．若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1=\overline{z_2}$

B．若 z_1+z_2 为纯虚数，则 z_1-z_2 为实数

C．若$\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}$，则$z_1$的实部与$z_2$的虚部互为相反数

D．若$z_1 \cdot z_2 \in R$，则z_1、z_2在复平面内对应的点不可能在同一象限

10．在$\triangle ABC$中，下列命题正确的是（　）

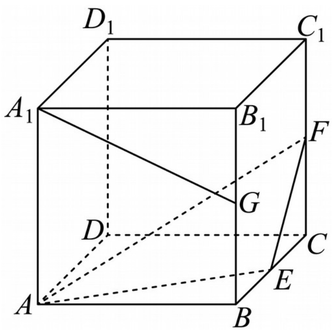
A．$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

B．若$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

C．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

D．若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，则$\triangle ABC$为锐角三角形

11．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，E，F，G分别为BC，CC_1，BB_1的中点.则（　）

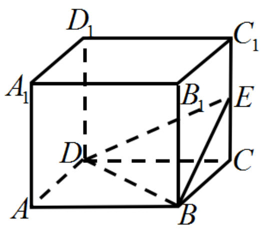


A．直线D_1D与直线AF相交　　B．直线A_1G与平面AEF平行

C．平面AEF截正方体所得的截面面积为$\dfrac{9}{8}$　　D．点C_1与点G到平面AEF的距离相等

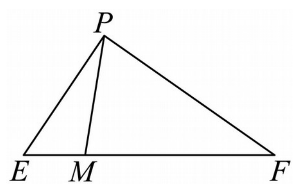
三、填空题

12．如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积是60，E为CC_1的中点，则三棱锥$C-EBD$的体积是____.



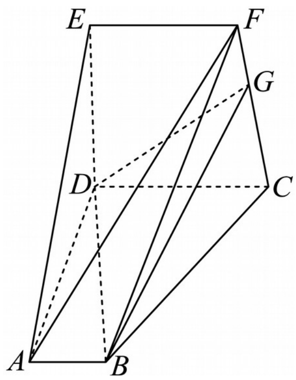
13．在$\triangle ABC$中，$A=60^\circ$，$b=1$，其面积为$\sqrt{3}$，则$\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$____.

14．根据《周髀算经》记载，公元前十一世纪，数学家商高就提出“勾三股四弦五”，故勾股定理在中国又称商高定理.而勾股数是指满足勾股定理的正整数组(a,b,c)，任意一组勾股数都可以表示为如下的形式：$\begin{cases} a=k\left(m^2-n^2\right), \\ b=2kmn, \\ c=k\left(m^2+n^2\right), \end{cases}$其中$k$，$m$，$n$均为正整数，且$m>n$.如图所示，$\triangle PEF$中，$PE\perp PF$，$PF=12>PE$，三边对应的勾股数中$k=1$，$n=2$，点$M$在线段$EF$上，且$EM=m$，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{MF}=$____.



四、解答题

15．如图，在几何体$ABCDFE$中，四边形$ABCD$为直角梯形，$DC=2AB,GC=2FG$，平面$ABEF\cap$平面$CDEF=EF$



(1)证明：$AF//$平面BDG

(2)证明：$AB//EF$

16．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别是角A，B，C的对边，且$c=\sqrt{2}$，$A=105°$，$C=30°$

（1）求b的值

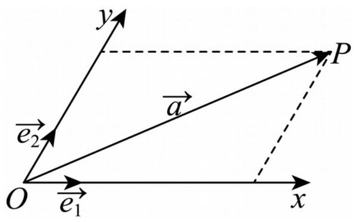
（2）$\triangle ABC$的面积.

17．已知函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

(1)若$f\left(x_1\right)\le f\left(x\right)\le f\left(x_2\right)$，$\left|x_2-x_1\right|$的最小值为$\frac{\pi}{4}$，求$f\left(x\right)$的对称中心；

(2)已知$\omega=3$，函数$f\left(x\right)$图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位得到函数$g\left(x\right)$的图象，若函数$g\left(x\right)$在$\left[m,n\right]$（$m,n\in\mathbf{R}$且$m<n$）上恰好有12个零点，求$n-m$的最小值.

18．互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系.如果坐标系中两条坐标轴不垂直，那么这样的坐标系称为斜坐标系.如图，设Ox，Oy是平面内相交成60°角的两条数轴，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$分别是与x轴、y轴正方向同向的单位向量.若向量$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，则把有序数对$\left(x,y\right)$叫做向量在斜坐标系$xOy$中的坐标.

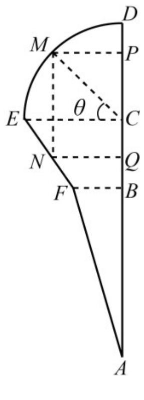


(1)设$\overrightarrow{OP}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$，求$\left|\overrightarrow{OP}\right|$；

(2)已知$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$；

(3)若$\vec{m}=\left(2,4\right)$，$\vec{n}=\left(-6,3\right)$，$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角记为$\theta$，求$\theta$的余弦值.

19．某烟花厂准备生产一款环保、安全的迷你小烟花，初步设计了一个平面图，如图所示，该平面图由$\mathrm{Rt}\triangle ABF$，直角梯形$BCEF$和以C为圆心的四分之一圆弧ED构成，其中$AB\perp BF$，$BC\perp CE$，$BF\parallel CE$，且$BC=BF=1$，$CE=2$，$AB=\frac{7}{2}$，将平面图形$ADEF$以AD所在直线为轴，旋转一周形成的几何体即为烟花.



(1)求该烟花的体积；

(2)工厂准备将矩形$PMNQ$（该矩形内接于图形$BDEF$，M在弧DE上，N在线段EF上，

PQ 在 AD 上）旋转所形成的几何体用来安放燃料，设 $\angle MCE=\theta$ （$0<\theta\le\frac{\pi}{3}$），

①请用 θ 表示燃料的体积 V；

②若烟花燃烧时间 t 和燃料体积 V 满足关系 $t=\frac{V}{\left(9-7\cos\theta\right)\cos^2\theta}$，请计算这个烟花燃烧的最长时间．

参考答案：

1．B

【分析】根据题意求出 z 的对应点即可选择正确答案.

【详解】由 $z=\mathrm{i}^2\left(1-\mathrm{i}\right)=-1+\mathrm{i}$ 知其对应点为 $\left(-1,1\right)$，则对应点 $\left(-1,1\right)$ 在第二象限.

故选：B.

2．A

【解析】根据平面向量的坐标运算，列方程求出 x 的值.

【详解】解：向量 $\vec{a}=\left(x,2\right)$，$\vec{b}=\left(3,-1\right)$；

若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

即 $3x+2\times\left(-1\right)=0$，

解得 $x=\dfrac{2}{3}$.

故选：A.

【点睛】此题考查由向量垂直求参数，属于基础题

3．C

【详解】函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变得到

$y=\sin 2\mathrm{x}$，再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

故选 C

4．A

【分析】先求出 $\overline{BD}$，再根据 $\overline{BD}=\overline{AB}$ 可判断 A；利用向量共线定理，设 $\overline{AB}=\lambda\overline{BC}$，利用向量相等列方程组求解 λ 即可判断 B；同样，设 $\overline{BC}=m\overline{CD}$，求 m 判断 C；求出 $\overline{AC}$，令

$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{CD}$，求解$n$来判断D．

【详解】对于A，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\left(-2\vec{a}+8\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}+5\vec{b}$，

又$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线，

又$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$有公共点B，所以A、B、D三点共线，A正确；

对于B，令$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，即$\begin{cases}-2\lambda=1\\8\lambda=5\end{cases}$，所以$\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2}\\\lambda=\dfrac{5}{8}\end{cases}$，$\lambda$不存在，

所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$不共线，即A，B，C三点不共线，B错误；

对于C，令$\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{CD}$，即$\begin{cases}3m=-2\\-3m=8\end{cases}$，所以$\begin{cases}m=-\dfrac{2}{3}\\m=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$，$m$不存在，

所以$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，即B，C，D三点不共线，C错误；

对于D，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+5\vec{b}\right)+\left(-2\vec{a}+8\vec{b}\right)=-\vec{a}+13\vec{b}$，

令$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{CD}$，即$\begin{cases}3n=-1\\-3n=13\end{cases}$，所以$\begin{cases}n=-\dfrac{1}{3}\\n=-\dfrac{13}{3}\end{cases}$，$n$不存在，

所以$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，即A，C，D三点不共线，D错误.

故选：A．

5．B

【详解】若四点中恰有三点共线，则直线和直线外一点，确定一个平面；若四点共线，则四点一定共面；若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线，故A正确．若两条直线没

有公共点，则两条直线可能异面，也可能平行，故 B 错误．若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=A$，则

$A\in\alpha$，$A\in\beta$.因为 $\alpha\cap\beta=l$，所以 $A\in l$，故 C 正确．两两相交且不共点的三条直线确定一个平面，故 D 正确．故选 B.

6．A

【分析】根据题意，结合三角函数的基本关系式、诱导公式和倍角公式，准确化简、运算，即可求解.

【详解】由 $\frac{1+\tan190^\circ}{1-\tan370^\circ}-\frac{2\cos70^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{1+\tan10^\circ}{1-\tan10^\circ}-\frac{2\sin20^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{1+\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}}{1-\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}}-\frac{2\sin20^\circ}{2\sin20^\circ\cos20^\circ}$

$=\frac{\left(\cos10^\circ+\sin10^\circ\right)^2}{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}-\frac{1}{\cos20^\circ}=\frac{1+\sin20^\circ}{\cos20^\circ}-\frac{1}{\cos20^\circ}=\tan20^\circ$.

故选：A.

7．A

【详解】依题意，利用正弦定理及二倍角公式得 $\frac{\sin C-\sin A}{2\sin C}=\frac{1-\cos B}{2}$，即 $\sin A=\sin C\cos B$，

又 $\sin A=\sin\left(B+C\right)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，故 $\sin B\cos C=0$，三角形中 $\sin B\neq0$，故

$\cos C=0, C=\frac{\pi}{2}$，故三角形为直角三角形，故选 A.

8．C

【分析】根据题意化简 $z^{2024}=\cos\left(2024\times\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2024\times\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}$ 即可得解.

【详解】根据题意，由 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$，

可得 $z^{2024}=\cos\left(2024\times\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(2024\times\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}$

$=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\mathrm{i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

故虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C

9．CD

【分析】本题可通过令 $z_1=1+2\mathrm{i}$、$z_2=2-\mathrm{i}$ 得出 A 错误，通过令 $z_1=1+2\mathrm{i}$、$z_2=-1+\mathrm{i}$ 得出 B 错误。然后设 $z_1=a+b\mathrm{i}$、$z_2=c+d\mathrm{i}$，a、b、c、d 均是实数，通过 $\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}$ 得出 $a=-d$，C 正确，最后通过 $z_1\cdot z_2\in R$ 得出 $ad+bc=0$，根据当 z_1、z_2 在复平面内对应的点在同一象限时 $ad+bc\neq 0$ 即可得出 D 正确.

【详解】A 项：若 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，则满足 $|z_1|=|z_2|$，不满足 $z_1=\overline{z_2}$，A 错误；

B 项：若 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=-1+\mathrm{i}$，则满足 z_1+z_2 为纯虚数，不满足 z_1-z_2 为实数，B 错误；

C 项：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，a、b、c、d 均是实数，

因为 $\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}$，所以 $z_1=z_2\cdot\mathrm{i}$，即 $a+b\mathrm{i}=(c+d\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}$，$a+b\mathrm{i}=-d+c\mathrm{i}$，$a=-d$，

故 z_1 的实部与 z_2 的虚部互为相反数，C 正确；

D 项：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，a、b、c、d 均是实数，

则 $z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}$，